ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие

Москва 2022

Алексеев М.В.

Варианты вступительных экзаменов и олимпиад по физике: учебно-методическое пособие .- М., 2022. 140 с.

Учебно-методическое пособие «Физика для абитуриентов» содержит теоретические и практические материалы по курсу физики в рамках школьной программы, необходимые для успешной сдачи вступительного экзамена в ИКСИ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание этой книги соответствует программе курса физики, изучаемого в средней школе. Достаточно полно обсуждаются разделы программы, которые, как показала практика приемных экзаменов на факультеты ИКСИ, наиболее сложны для поступающих.

Цель учебно-методического пособия – помочь читателю освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, и приобрести уверенность в самостоятельной работе. Для этого необходимо ясно представлять смысл физических понятий, изучить физические законы и овладеть элементами математической культуры - алгеброй, тригонометрией, техникой тождественных преобразований.

1 ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

1.1 2015 ГОД

Задача 1. Шарик, брошенный вертикально вверх, возвращается в точку бросания через время *t*. На какую высоту поднялся шарик?

Решение.

$$0 = \vartheta_0 - g\frac{t}{2} \Rightarrow \vartheta_0 = \frac{gt}{2}$$

$$H = \vartheta_0 \frac{t}{2} - \frac{g\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow H = \frac{gt^2}{4} - \frac{gt^2}{8} = \frac{gt^2}{8}$$

$$H = \frac{gt^2}{8}$$

Ответ: $H = \frac{gt^2}{8}$

Задача 2. Определите массу водорода, находящегося в баллоне емкостью 0.06 $м^3$ под давлением $8.3 \cdot 10^5$ Па при температуре 27 ^{0}С. Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

Решение.

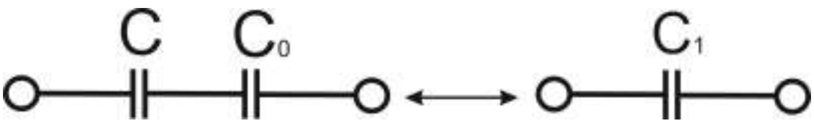
$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$m = \frac{\mu PV}{RT} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8.3 \cdot 10^5 \cdot 0.06}{8.3 \cdot 300} = 0.04 \text{ кг}$$

Ответ: $m = \frac{\mu PV}{RT} = 0.04$ кг.

Задача 3. Какой должна быть емкость конденсатора, который надо соединить последовательно с конденсатором емкостью 800 пФ, чтобы получить батарею конденсаторов емкостью 160 пФ?

Решение.



$C_0 = 800$ пФ
$C_1 = 160$ пФ

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_0} \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{C_0 - C_1}{C_1\, C_0}$$

$$C = \frac{C_1 C_0}{C_0 - C_1} = 200 \text{ пФ}$$

Ответ: $C = \frac{C_1 C_0}{C_0 - C_1} = 200$ пФ.

Задача 4. Квадратная рамка со стороной 10 см расположена в однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл так, что нормаль к ее поверхности образует угол 60^0 с вектором индукции. Определите магнитный поток через плоскость рамки.

Решение.

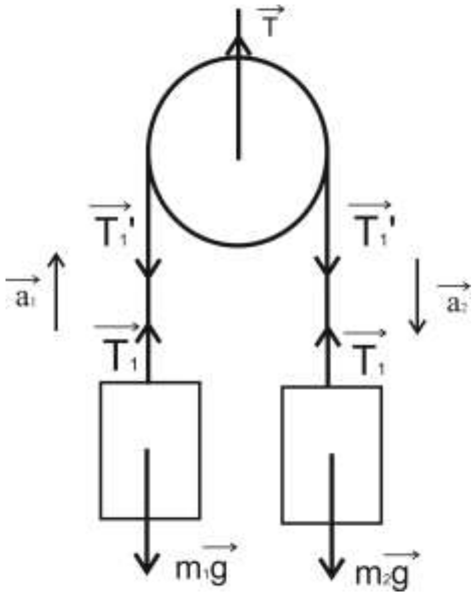
$$\Phi_B = BS\cos\alpha = Bl^2\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}2\cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{2} = 10^{-3}$$

Ответ: $\Phi_B = Bl^2\cos\frac{\pi}{3} = 10^{-3}$ Вб.

Задача 5. Невесомый блок подвешен к потолку с помощью троса. На концах нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массой m_1 и m_2. Найдите натяжение троса.

Решение.

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a \\ T_1' = T_1 \\ m_1 a = T_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - T_1 \\ T - 2T_1 = 0 \end{cases}$$



$$T_1 = \frac{2g \cdot m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$T = 2T_1 = \frac{4g \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Ответ: $T = \frac{4g \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 6. Один шар налетает на другой, большей массы, первоначально покоившийся. После центрального упругого удара шары разлетаются так, что величина скорости меньшего шара в n раз больше величины скорости большего шара. Найдите отношение масс шаров.

Решение.

$$m_2 v_1 = m_1 v_2 - m_2 n v_2$$

$$v_3 = n v_2$$

$$\frac{m_2 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{m_2 n^2 v_2^2}{2}$$

$$v_1 = \frac{m_1}{m_2} v_2 - n v_2$$

$$v_1 = v_2 \left(\frac{m_1 - n m_2}{m_2} \right)$$

$$\frac{m_2 v_2^2 (m_1 - n m_2)^2}{m_2^2} = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{m_2 n^2 v_2^2}{2}$$

$$\frac{m_1^2 - 2 m_1 m_2 n + n^2 m_2^2}{m_2} = m_1 + m_2 n^2$$

$$m_1^2 - 2 m_1 m_2 n + n^2 m_2^2 = m_1 m_2 + m_2^2 n^2$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2} \right) = 3n \left(\frac{m_1}{m_2} \right)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 3n$$

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} = 3n$.

Задача 6. Элемент замыкают один раз сопротивлением R_1, другой - R_2. В обоих случаях выделяется одинаковая мощность. При каком внешнем сопротивлении она будет наибольшей?

Решение.

$$N = I_1^2 R_1 = \frac{\xi^2}{(R_1 + r)^2} \cdot R_1$$

$$N = I_2^2 R_2 = \frac{\xi^2}{(R_2 + r)^2} \cdot R_2$$

$$\frac{\mathrm{R}_1}{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{r})^2} = \frac{\mathrm{R}_2}{(\mathrm{R}_2 + \mathrm{r})^2} \to \mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2}$$

$$I_1 = \frac{\xi}{R_1 + r}$$

$$I_1 R_1 + I_1 r = \xi$$

$$R_1 = \frac{\xi - I_1 r}{I_1}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P} = I_1 R_1 = \mathrm{I}_1^2 * \dfrac{(\xi - \mathrm{I}_1 \mathrm{r})}{\mathrm{I}_1} = \mathrm{I}_1 (\xi - \mathrm{I}_1 \mathrm{r}) \\ \mathrm{P} = \mathrm{I}_2^2 \mathrm{R}_2 = \mathrm{I2} (\xi - \mathrm{I}_1 \mathrm{r}) \\ \mathrm{P_{MAX}} = \dfrac{\xi^2}{4\mathrm{r}} \end{cases}$$

$$I_1 \xi - I_1^2 r = I_2 \xi - I_2^2 r \to r = \frac{\xi (I_1 - I_2)}{I_2^2 - I_1^2} = \frac{\xi}{I_1 + I_2}$$

$$P = I_1 (\xi - \frac{I_1 \xi}{I_1 + I_2}) = I_1 \frac{\xi I_2}{I_1 + I_2} => \xi = \frac{P (I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}$$

$$r = \frac{P}{I_1 + I_2}$$

$$\mathrm{P_{MAX}} = \frac{P^2 (I_1 + I_2)^2 I_1 I_2}{4 \cdot I_1^2 I_2^2 P} = \frac{P (I_1 + I_2)^2}{4 I_1 I_2}$$

Ответ: $\mathrm{P_{MAX}} = \frac{P (I_1 + I_2)^2}{4 I_1 I_2}$.

Задача 6. Линза с фокусным расстоянием F_1 формирует уменьшенное в n раз действительное изображение предмета. Другая линза, помещенная на место первой, формирует его увеличенное в n раз действительное изображение. Найдите фокусное расстояние второй линзы.

Решение.

$$\begin{cases} \mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{h'}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{F_1}} = \dfrac{1}{\mathrm{d_1}} + \dfrac{1}{\mathrm{f_1}} \\ \mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{d_1}}{\mathrm{f_1}} \to \mathrm{f_1} = \dfrac{\mathrm{d_1}}{\mathrm{n}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mathrm{F_1}} = \frac{1}{\mathrm{d_1}} + \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d_1}} = \frac{1 + \mathrm{n}}{\mathrm{d_1}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{d_1}} = \frac{1}{\mathrm{F_1} (\mathrm{n} + 1)}$$

$$n = \frac{\mathrm{h}''}{\mathrm{h}}$$

$$n = \frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{d}_1} = \frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{F}_1\,(\mathrm{n}+1)} \rightarrow \mathrm{f}_2 = \mathrm{F}_1\,(n+1)n$$

$$\frac{1}{\mathrm{F}_2} = \frac{1}{\mathrm{d}_1} + \frac{1}{\mathrm{f}_2} = \frac{1}{\mathrm{F}_1\,(\mathrm{n}+1)} + \frac{1}{\mathrm{nF}_1\,(\mathrm{n}+1)}$$

$$\mathrm{F}_2 = \frac{\mathrm{nF}_1\,(\mathrm{n}+1)}{\mathrm{n}+1} = \mathrm{nF}_1$$

Ответ: $\mathrm{F}_2 = \mathrm{nF}_1$.

1.2 2016 ГОД

Задача 1. Электровоз массой m_0, движущийся со скоростью V, сталкивается с неподвижным вагоном массой m_1, после чего они движутся вместе. Найдите скорость их совместного движения.

Решение.

Запишем закон сохранения импульса системы электровоз, вагон, в проекции на горизонтальную ось:

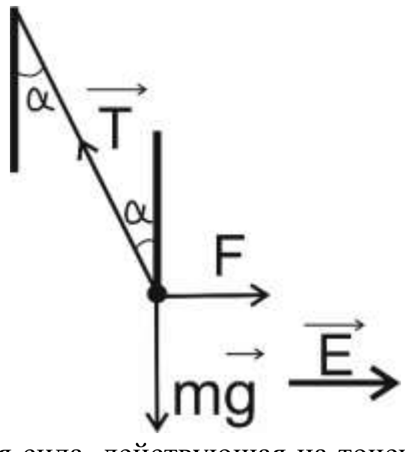
$$m_0 V = (m_0 + m_1)V_2$$

$$V_2 = \frac{m_0 V}{m_0 + m_1}.$$

Ответ: $V_2 = \frac{m_0 V}{m_0 + m_1}$.

Задача 2. Маленький шарик, подвешенный на шелковой нити, имеет заряд q. В горизонтальном электрическом поле с напряженностью E нить отклонилась от вертикали на угол α. Найдите массу шарика.

Решение.



Электрическая сила, действующая на точечный заряд со стороны электрического поля равна $F = qE$.

Учитывая это спроецируем второй закон Ньютона на вуртикальную и горизонтальную оси:

$$\begin{cases} T\cos\alpha = mg \\ T\sin\alpha = qE \end{cases}$$

разделим первое уравнение на второе:

$\tan\alpha = \frac{qE}{mg}$,

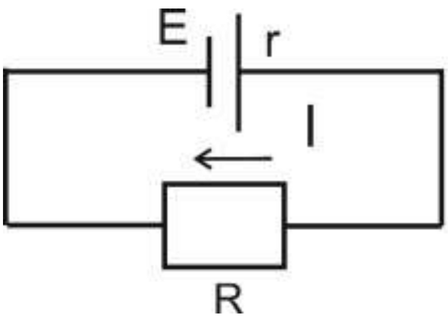
выразим массу

$m = \frac{qE}{g\tan\alpha}$.

Ответ: $m = \frac{qE}{g\tan\alpha}$.

Задача 3. Гальванический элемент с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1 Ом замкнут на сопротивление 4 Ом. Найдите силу тока в цепи.

Решение.



Запишем закон Ома для замкнутой цепи:

$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$.

Ответ: $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$.

Задача 4. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл со скоростью $1{,}6 \cdot 10^7$ м/с, направленной перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус (в мм) окружности, по которой движется электрон. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $9\cdot10^{-31}$ кг.

Решение.

Сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля равна: $F = eVB$. Запишем второй закон Ньютона для электрона, равномерно движущегося по окружности под действием силы Лоренца, учтем при этом что ускорение электрона - центростремительное $a = \frac{V^2}{R}$:

$$m\frac{V^2}{R} = eVB,$$

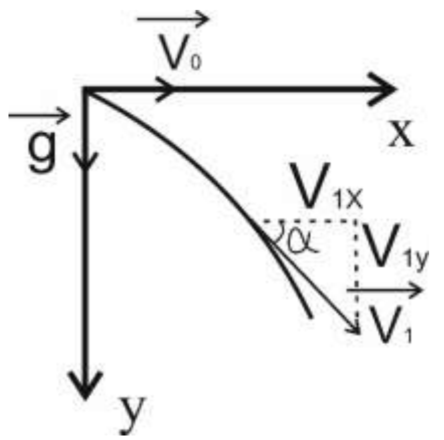
выразим отсюда радиус окружности:

$$R = \frac{mV}{eB}$$

Ответ: $R = \frac{mV}{eB}$.

Задача 5. Камень брошен горизонтально. Через время T после броска вектор его скорости составил угол α с горизонтом. Найдите начальную скорость камня.

Решение.



Скорость камня при равноускоренном движении зависит от времени как:

$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t.$

В момент времени Т проекции скорости на координатные оси и тангенс угла, который составляет скорость с горизонтом (смотри рисунок) равны:

$V_{1x} = V_0,$

$V_{1y} = g\text{T},$

$\tan\alpha = \dfrac{V_{1y}}{V_{1x}};$

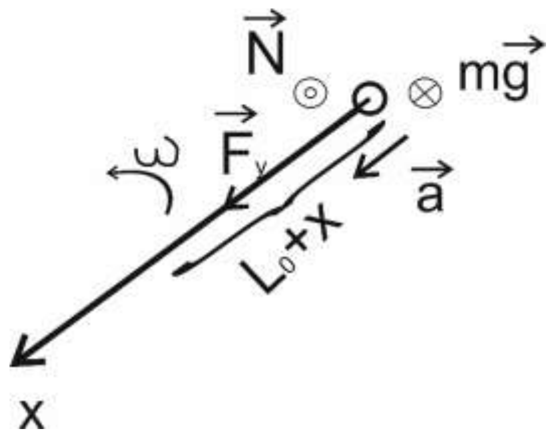
выразим отсюда величину начальной скорости:

$$V_0 = gT\,\text{ct}g\,\alpha$$

Ответ: $V_0 = gT\,\text{ct}g\,\alpha.$

Задача 6. К одному концу резинового шнура прикрепили шарик массой m, другой его конец закрепили на горизонтальной гладкой поверхности и привели шарик во вращение по поверхности с угловой скоростью ω. Найдите удлинение шнура x, если его жесткость k, а первоначальная длина l_0.

Решение.



Запишем для шарика второй закон Ньютона:

$m\vec{a} = \vec{F}_y + \vec{N} + m\vec{g}.$

Спроецируем его на ось, сонаправленную с силой упругости, а также учтем, что ускорение центростремительное и равно $a = \omega^2(l_0 + x)$, где $(l_0 + x)$ -радиус окружности, по которой движется шарик:

$$x: m\omega^2(l_0 + x) = kx$$

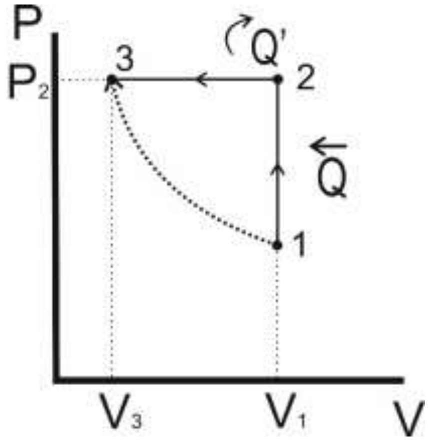
выразим удлинение шнура:

$$x = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

Ответ: $x = \frac{m\omega^2 l_0}{k-m\omega^2}$.

Задача 7. Некоторое количество идеального одноатомного газа изохорно нагрели, сообщив ему Q теплоты. Затем газ изобарно охладили до первоначальной температуры. Сколько теплоты было отобрано у газа при изобарном охлаждении?

Решение.



Запишем первое начало термодинамики для процессов 1-2 и 2-3, при этом учтем, что в процессе 2-3 тепло от газа отбирается:

$Q = (U_2 - U_1) + A_{12},$

$-Q' = (U_3 - U_2) + A_{23}$.

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа для каждого i-ого состояния равна $U_i = \frac{3}{2}\nu R T_i$.

Работа газа в процессе 1-2 равна 0, в процессе 2-3 $A_{23} = P_2(V_3 - V_2)$, с учетом уравнения Менделеева-Клайперона:

$$A_{23} = \nu R(T_3 - T_2).$$

Учтем, что $T_1 = T_3$.

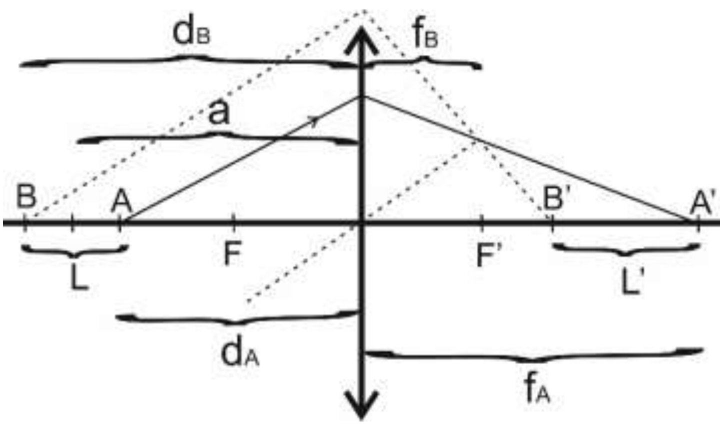
После алгебраических преобразований получаем:

$Q' = \frac{5}{3}Q$.

Ответ: $Q' = \frac{5}{3}Q$.

Задача 8. Вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположен стержень так, что его середина находится на расстоянии a от линзы. Чему равна длина стержня, если его продольное увеличение равно K?

Решение.



Продольное увеличение линзы:

$k = \frac{l'}{l}$,

при этом (смотри рисунок):

$$l' = f_A - f_B$$

$d_A = a - \frac{l}{r}$,

$d_B = a + \frac{l}{r}$.

С учетом вышесказанного запишем формулу линзы для точек A' и B':

$$\begin{cases} \frac{1}{F} = \frac{2}{a-\frac{l}{r}} + \frac{1}{f_A}, \\ \frac{1}{F} = \frac{2}{a+\frac{l}{r}} + \frac{1}{f_B}, \\ k = \frac{f_A - f_B}{l}; \end{cases}$$

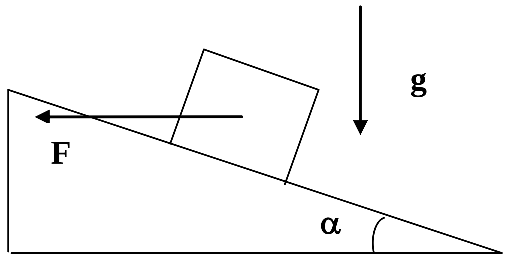
выразим отсюда длину стержня:

$$l = 2\sqrt{(a-F)^2 - \frac{F^2}{k}}$$

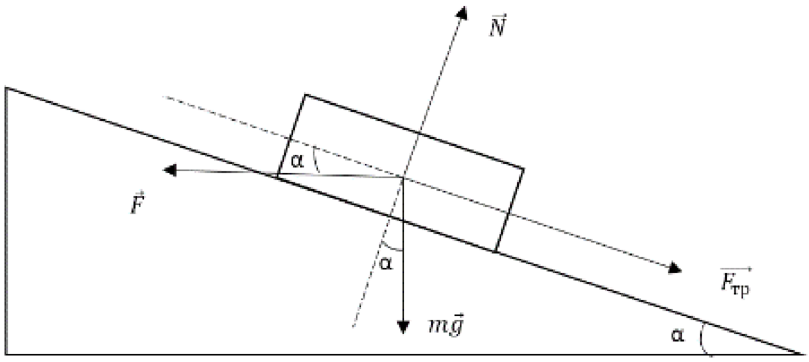
Ответ: $l = 2\sqrt{(a-F)^2 - \frac{F^2}{k}}$

1.3 2017 ГОД

Задача 1. С какой горизонтальной силой F надо действовать на брусок массой m = 2 кг, находящийся на неподвижной наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^0$, чтобы он двигался равномерно вверх по наклонной плоскости (см. рис.)? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость равен k = 0,3. g = 10 м/с^2.



Решение:



$N = mg \cdot \cos\alpha + F \cdot \sin\alpha$

$F \cos\alpha = mg \cdot \sin\alpha + k(mg \cdot \cos\alpha + F \cdot \sin\alpha)$

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + k \cdot \cos\alpha)}{\cos\alpha - k \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot 10(0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}87)}{0{,}87 - 0{,}3 \cdot 0{,}5}$$

Ответ: $F \approx$ 21,1 Н.

Задача 2. Один моль идеального газа переводят по изобаре из состояния с температурой T_1 и объемом V_1 в состояние, в котором объем газа уменьшается на некоторую величину ΔV, а температура становится равной T_2. Найти изменение объема ΔV.

Решение:

Запишем уравнение изобары:

$\frac{V1}{V2} = \frac{T1}{T2}$ (1),

$V_2 = V_1 - \Delta V$ (2)

(2) в (1): $\frac{V1}{V1-\Delta V} = \frac{T1}{T2}$ (3)

$T_2 \cdot V_1 = T_1 \cdot (V_1 - \Delta V)$ (4)

$$\Delta V = \frac{(T_2 - T_1) \cdot V_1}{T_1} = (\frac{T_2}{T_1} - 1) \cdot V_1$$

Ответ: $\Delta V = (\frac{T_2}{T_1} - 1) \cdot V_1$

Задача 3. В баллоне находится одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 4$ моля при температуре $T = 300$ К. При нагревании болона средняя квадратичная скорость молекул газа увеличилось в $n = 1,3$ раза. Какое количество теплоты Q сообщили газу? Универсальная газовая постоянная $R = 8,314$ Дж/(К моль).

Решение:

Запишем 1-е начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$.

Баллон в процессе нагревания газа не меняет своего объема: $\Delta V = 0$.

Следовательно, газ не совершает работы: $A = 0$.

Внутренняя энергия идеального газа есть функция только температуры:

$$U = \frac{3}{2} \nu RT.$$

Тогда (с учетом вышесказанного) $Q = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$.

Внутренняя энергия идеального газа определяется средней квадратичной скоростью молекул газа: $\frac{mv^2}{2} = \frac{3kT}{2}$.

Следовательно, конечная и начальная температуры газа удовлетворяют отношению: $\frac{T_к}{T_н} = \frac{v_к^2}{v_н^2} = n^2$.

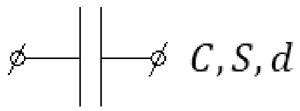
Окончательно имеем

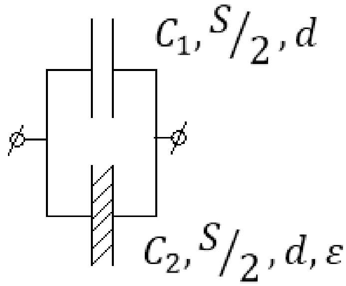
$Q = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\nu R(T_к - T_н) = \frac{3}{2}\nu RT_н(n^2 - 1)$.

Ответ: $Q = 10{,}3$ кДж

Задача 4. Плоский воздушный конденсатор с вертикально расположенными пластинами наполовину погрузили в воду с диэлектрической проницаемостью ε равной 81. Как изменится емкость?

Решение:





C – емкость конденсатора до погружения,
C' – емкость конденсатора после погружения.

После погружения конденсатора образовалась система двух параллельно соединенных конденсаторов с вдвое меньшей площадью пластин.

$C = \varepsilon_0 S d$

$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{C}{2}$

$C_2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2d} = \frac{\varepsilon C}{2}$

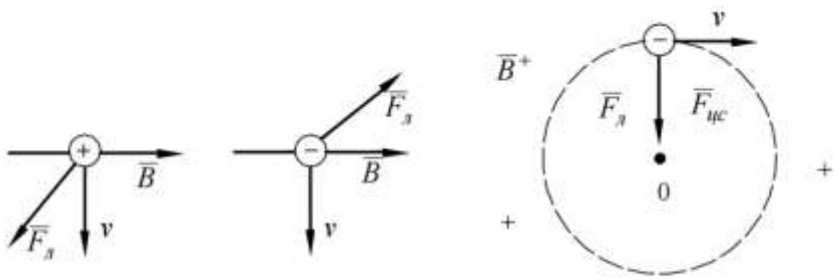
$C' = C_1 + C_2 = \frac{C}{2} + \frac{\varepsilon C}{2} = \frac{1}{2} C(\varepsilon + 1)$

$\frac{C'}{C} = \frac{\frac{1}{2} C(\varepsilon + 1)}{C} = \frac{\varepsilon + 1}{2} = \frac{81 + 1}{2} = 41$

Ответ: $\frac{C'}{C} = 41$

Задача 5. Определить центростремительную силу, действующую на протон в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл (вектор магнитной индукции перпендикулярен вектору скорости), если радиус окружности, по которой он движется, равен 5 см. Масса протона $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение:



Заряд, двигаясь со скоростью v перпендикулярно линиям B однородного магнитного поля, испытывает действие силы Лоренца

$\vec{F}л = q[\vec{B} \times \vec{V}]$, постоянной по величине и всегда действующей по нормали к скорости (угол α равен $\frac{\pi}{2} = 90^0$) при этом $Fл = qBVsin\alpha$, где $sin90^0 = 1$ и $\Rightarrow Fл = qBV$.

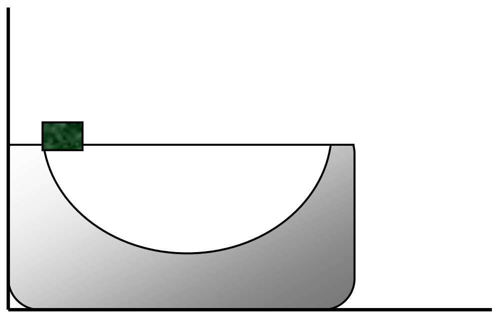
Очевидно $\vec{F}л$, является центростремительной силой $\vec{F}л = \vec{F}цс$, то есть $\vec{F}_л = m\vec{a}_{цс}$, поэтому $qBV = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow V = \frac{qBR}{m}$.

$V = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{1{,}67\ 10^{-27}} = 4{,}8 \cdot 10^4$ м/с

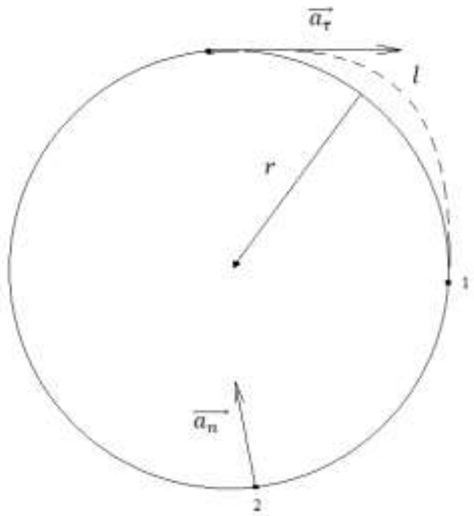
$Fцс = Fл = qBV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}8 \cdot 10^4$

Ответ $Fцс = 7{,}68 \cdot 10^{-17} H$.

Задача 6. Тело, двигаясь равноускоренно, из состояния покоя, по окружности радиуса r, прошло за время t_1 путь l. С каким центростремительным ускорением a_n двигалось тело спустя время t_2 после начала движения?



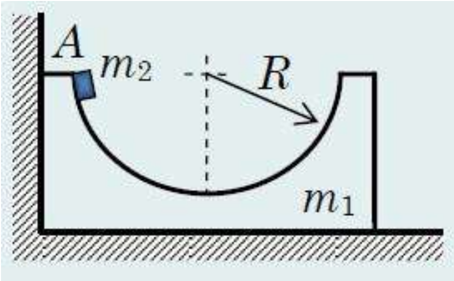
Решение:



$$\begin{cases} l = a_\tau t_1^2 \\ V_2 = a_\tau t_2 \\ a_n = \dfrac{V_2^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_\tau = \dfrac{2l}{t_1^2} \\ V_2 = \dfrac{2lt_2}{t_1^2} \\ a_n = \dfrac{4l^2t_2^2}{rt_1^4} \end{cases}$$

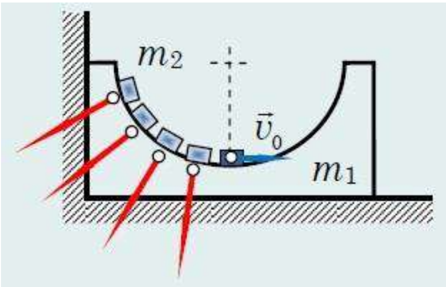
Ответ $a_n = \frac{4l^2t_2^2}{rt_1^4}$.

Задача 7. У вертикальной стенки на гладкой поверхности стоит чаша массы M, внутренняя поверхность которой имеет форму полусферы радиуса R. На край чаши кладут шайбу массы m и отпускают ее. Найти максимальную скорость чаши при последующем движении. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.



Решение:

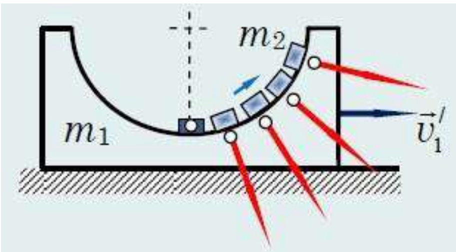
Рассмотрим движение шайбы на левой половине углубления бруска. Со стороны шайбы на брусок действует сила, направленная по радиусу углубления. Брусок прижимается к стене и неподвижен.



В нижней точке шайба приобретет скорость $V0$, которую найдем из закона сохранения механической энергии:

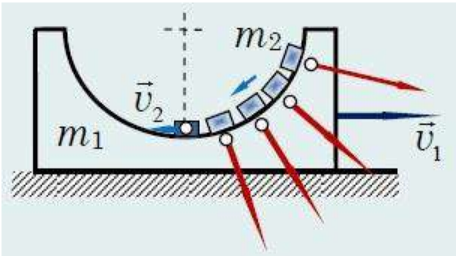
$$m_2gR = \frac{mV_0^2}{2}, \text{откуда } V_0 = \sqrt{2gR}$$

Теперь рассмотрим движение шайбы на правой половине углубления бруска. В результате взаимодействия шайбы и



бруска, брусок будет разгоняться. В момент достижения шайбой своей максимальной высоты, брусок будет иметь скорость $V1'$.

Но эта скорость не будет еще максимальной. При обратном движении шайбы по правой половине углубления, брусок попрежнему будет разгоняться. Максимум скорости брусок достигнет в момент, когда шайба окажется в самой нижней точке углубления.



Далее при переходе на левую половину, в результате взаимодействия шайбы и бруска, брусок будет уменьшать свою скорость. Запишем закон сохранения импульса и энергии в момент достижения бруском максимальной скорости:

$$m_2V_0 = m_1V_1 - m_2V_2$$

$$\frac{m_2V_0^2}{2} = \frac{m_2V_2^2}{2} + \frac{m_1V_1^2}{2}$$

Перенесем в левую часть все слагаемые с массой второго груза, а в право с массой первого груза:

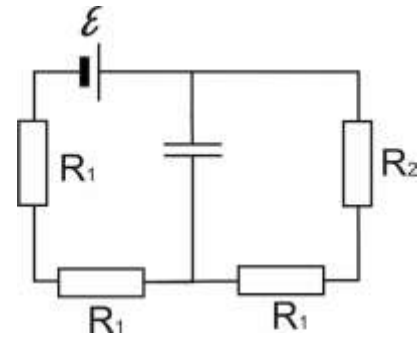
$$m_2(V_0 + V_2) = m_1V_1$$

$$m_2(V_0^2 - V_2^2) = m_1V_1^2$$

Разделим левые и правые части последних уравнений соответственно, получим: $V_0 - V_2 = V_1$ отсюда выразим $V_2 = V_0 - V_1$ и подставим в $m_2V_0 = m_1V_1 - m_2V_2$:
$m_2V_0 = m_1V_1 - m_2V_0 + m_2V_1$ и выразим $V1$:
$V_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gR}$ будет являться V_{max}

Ответ $V_{max} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gR}.$

Задача 8. Конденсатор включен в цепь постоянного, тока, состоящую из источника ЭДС ξ и сопротивлений с номиналами R_1 и R_2. Известно, что отношение напряжения Uна конденсаторе к значению ЭДС равно некоторой величине k, т.е. $U/\xi = k$. Найти отношение сопротивлений R_2/R_1, если k=2/3.



Решение:

Так как постоянный ток через конденсатор не проходит, при нахождении тока участок цепи с конденсатором можно исключить (это, фактически «разрыв цепи»).

Тогда ток в контуре, состоящем из источника ЭДС и всех сопротивлений будет равен:

$$I = \frac{\xi}{3R_1 + R_2}$$

Так как участок цепи, состоящий из последовательно включенных сопротивлений R_1 и R_2, подключен параллельно конденсатору, падение напряжения на этом участке будет равно напряжению на конденсаторе U, то есть:

$U = I(R_1 + R_2) = \frac{\xi}{3R_1+R_2} \cdot (R_1 + R_2)$.

Тогда: $\frac{U}{\xi} = \frac{R_1+R_2}{3\,R_1+R_2} = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{3+\frac{R_2}{R_1}}$

По условию $\frac{U}{\xi} = k$, следовательно $\frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{3+\frac{R_2}{R_1}} = k$, отсюда находим $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3k-1}{1-k}$, подставляя k=$\frac{2}{3}$, получаем $\frac{R_2}{R_1} = 3$.

Ответ $\frac{R_2}{R_1} = 3$.

1.4 2018 ГОД

Задача 1. Тело массой M подвешено на длинной невесомой нити. Нить отклонили так, что тело понялась на высоту h. После этого тело опустили. В момент, когда оно проходило нижнюю точку траектории, в тело попал горизонтально летевший пластилиновый шарик, который прилип к телу, после чего тело остановилось. С какой скорость летел шарик, если его масса m?

Решение:

Обозначим через V_0 скорость тела в нижней точке траектории. По закону сохранения энергии имеем: $Mgh = \frac{M\,V_0^2}{2}$.

Отсюда $V_0 = \sqrt{2gh}$. Поскольку после удара тело и пластилиновый шарик останавливаются, из закона сохранения импульса следует, что $\mathrm{M\,V_0} - \mathrm{m}V = 0$, где V – скорость пластилинового шарика до удара. Выразим $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}\mathrm{V_0} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}\sqrt{2\mathrm{gh}}$.

Ответ: $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}\sqrt{2\mathrm{gh}}$.

Задача 2. Шарик массой $m = 100$ г подвешен к потолку на легкой пружине длиной 0,5 м, жесткостью $k = 100$ Н/м, и совершает вертикальные колебания с амплитудой $A =$ 2 см. Найдите наибольшее ускорение шарика.

Решение:

Длина пружины много больше амплитуды колебаний, поэтому колебания будем считать малыми. Тогда угловая частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ускорение шарика равно второй производной от смещения $a = A\omega^2 \cos\omega t$. Так как максимальное значение косинуса равно 1, получаем:

$$a = \frac{Ak}{m} = 20 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $a = 20 \text{ м/с}^2$.

Задача 3. Два точечных заряда q_1 и q_2 расположены на некотором расстоянии друг от друга в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Энергия их взаимодействия равна W. Заряды поместили в бесконечную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 4$, сохранив их расположение. Энергия их взаимодействия стала равна W_1. Найти отношение $\frac{W_1}{W}$.

Решение:

Энергия взаимодействия точечных зарядов равна $W = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r}$, где r – расстояние между зарядами. В среде с диэлектрической проницаемостью ε_1, соответственно $W_1 = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon_1 r}$.

Ответ: $\frac{W_1}{W} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = 0{,}5$.

Задача 4. Сила тока I в металлическом проводнике равна 1 А, сечение S проводника 5 мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ свободных электронов определить среднюю скорость $< v >$ их упорядоченного движения.

Решение:

Учитывая, что плотность тока $j = \frac{I}{S}$ и $j = \mathrm{e} \cdot n \cdot < v >$ (для металла e – заряд электрона), получаем:

$$< v > = \frac{I}{\mathrm{e} \cdot n \cdot S} = 5 \cdot 10^{-5} \text{м/с}.$$

Ответ: $< v > = 5 \cdot 10^{-5} \text{м/с}$.

Задача 5. Ток насыщения, протекающий через вакуумный фотоэлемент при его освещении светом $I_{\text{н}} = 0{,}5$ нА.

Определить число N фотоэлектронов, покидающих поверхность катода в единицу времени. Заряд электрона $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл.

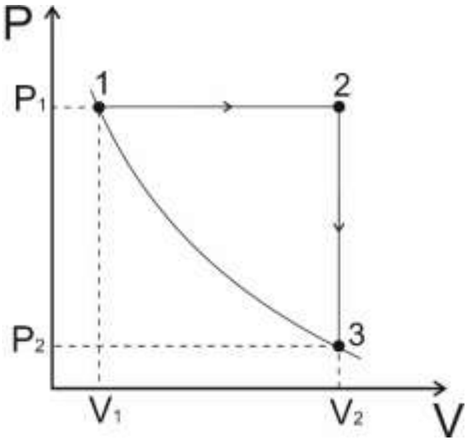
Решение:

N электронов, покидающих поверхность катода в единицу времени, переносят в единицу времени заряд $N{\cdot}e$. Это и есть (по определению) ток $I_н$. Приравнивая, $I_н = N{\cdot}e$, получаем ответ.

Ответ: $N = \frac{I_н}{e} = 3{,}1 \cdot 10^9\ c^{-1}$.

Задача 6. Один моль идеального газа переводят из состояния «1» по изобаре в состояние «2», а затем из состояния «2» в состояние «3» по изохоре. Найти температуру газа в конечном состоянии «T_3». Считать, что T_1, P_1, P_3, V_1, V_2 – известны. При каких начальных условиях конечная температура будет равна начальной?

Решение:



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_2}{T_3} => T_3 = \frac{P_2}{P_1} T_2$

$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 => T_3 = \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} T_1$

«T_3» будет равна «T_1» при условии, что:

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{n}; \frac{V_2}{V_1} = n.$

$T_3 = \frac{1}{n} T_1$

Ответ: $T_3 = \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} T_1,\ T_3 = \frac{1}{n} T_1.$

Задача 7. Тонкая однородная палочка шарнирно закреплена за верхний конец. Нижний конец палочки погружен в воду. При равновесии под водой находится $k = 1/5$ часть длины палочки. Определить плотность ρ материала, из которого изготовлена палочка. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1\text{г/см}^3$. **Указание:** обязательно получить ответ в общем буквенном виде, только после этого подставлять числа.

Решение:

Обозначим через l длину, через s — площадь поперечного сечения палочки. Действующий на палочку момент силы тяжести уравновешивается моментом силы Архимеда, которая приложена к середине погруженной в жидкость части палочки:

$\rho slg \cdot \left(\frac{l}{2}\right) cos\alpha = \rho_{\text{в}} sklg \cdot \left(l - \left(\frac{kl}{2}\right)\right) cos\alpha,$ где α — угол, который палочка составляет с горизонтом. Отсюда:

$\rho = \rho_{\text{в}} k(2 - k) = 0{,}36\ \text{г/см}^3.$

Ответ: $\rho = \rho_{\text{в}} k(2 - k) = 0{,}36\ \text{г/см}^3.$

Задача 8. Имеется виток из проводящего материала радиуса R, по нему течет ток I. Найдите магнитное поле на оси кольца в точке P, находящийся на расстоянии L от центра кольца.

Решение:

Возьмём два малых участка проводника с токами ΔI, каждый из пары токов создаёт магнитное поле равное $dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IdLsin\alpha}{r^2}$ при этом учтём, что $d\vec{B} = \vec{B}_x + \overrightarrow{B_\perp}$ теперь $dB_x = dBcos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dL}{(x^2+R^2)}\frac{R}{(x^2+R^2)^{1/2}}$ в данном случае $dL = 2\pi R$ есть длинна окружности по которой суммируются все ΔI *тогда* $B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ $=> B = \frac{\mu_0 I}{2R^{5/2}}$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2R^{5/2}}$.

1.4 2019 ГОД

Задача 1. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное удвоенному диаметру шаров?

Решение:

Согласно закону Всемирного тяготения силы взаимодействия между шарами в первом и втором случае равны, соответственно:

$$F_1 = G\frac{m^2}{d^2}, F_2 = G\frac{m^2}{(2d)^2}.$$

(m– масса одного шара, d – диаметр одного шара).

Таким образом:

$$\frac{F_1}{F_2} = 4.$$

Ответ: в 4 раза.

Задача 2. Какую массу воды надо дополнительно испарить в комнате объемом 49,8 м^3, чтобы при температуре 27^{o}C, повысить относительную влажность от 25% до 50%? Давление насыщенных паров при температуре 27^{o}C равно 3,6 кПа, молярная масса воды 18 г/моль, универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль·К).

Решение:

С помощью уравнения Менделеева-Клайперона выразим массу насыщенного пара в комнате:

$$m_{\text{н}} = \frac{p_{\text{н}}VM}{RT},$$

откуда найдем разницу между конечной и начальной массой пара:

$\Delta m = (\varphi_2 - \varphi_1)m_{\text{н}} = 324$ г
($\varphi_1 = 0{,}25$ и $\varphi_2 = 0{,}5$ –
начальная и конечная относительные влажности).

Ответ: $\Delta m = 324$ г.

Задача 3. Расстояние между пластинами в плоском конденсаторе 10 мм. Разность потенциалов между обкладками 300 В. Какая сила со стороны электрического поля будет действовать на заряд 1 нКл, со стороны конденсатора?

Решение:

Напряженность электрического поля внутри конденсатора равна:

$E = \dfrac{U}{d}$.

$U = 300$ В - разность потенциалов между обкладками конденсатора

$d = 10$ мм– расстояние между обкладками

Сила, действующая на точечный электрический заряд $q = 1$ нКл.

$F = qE = q\frac{U}{d} = 30$ мкН.

Ответ: $F = 30$ мкН.

Задача 4. Квадратная рамка со стороной 15 см расположена в однородном магнитном поле с индукцией 0.02 Тл так, что нормаль к ее поверхности образует угол 60о с вектором индукции. Определите магнитный поток через плоскость рамки.

Решение:

Магнитный поток через плоскость рамки равен:

$\Phi = BScos\alpha = Ba^2cos\alpha = 225$ мкВб.

$B = 0{,}02$ Тл – индукция магнитного поля

$S = a^2 = (0{,}15)^2 = 0{,}0225$ м^2 – площадь рамки

$\alpha = 60^{\circ}$ – угол между нормалью к поверхности рамки и вектором магнитной индукции).

Ответ: $\Phi = 225$ мкВб.

Задача 5. Подвешенный на легкой пружине шарик совершает гармонические колебания с периодом T и амплитудой A вдоль вертикальной оси. Найти модуль скорости шарика V в те моменты, когда его ускорение по модулю составляет часть α амплитуды ускорения ($\alpha < 1$).

Решение:

При движении вдоль оси *x* координата, скорость и ускорения шарика равны соответственно:

$x = A\cos\omega t,$

$V_x = -\,\omega A\sin\omega t,$

$a_x = -\,\omega^2 A\cos\omega t$, где $\omega = 2\pi/T$.

По условию задачи:

$|a_x| = \alpha\omega^2 A = |-\,\omega^2 A\cos\omega t|,$ (1)

при этом модуль скорости равен:

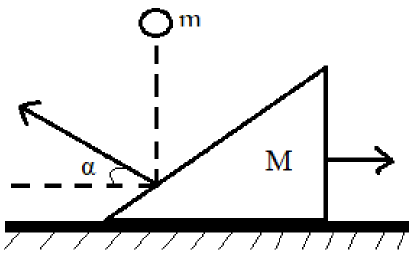
$V = |V_x| = |-\,A\omega\sin\omega t|.$ (2)

Из (1) и (2) найдем:

$V = \omega A\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{2\pi A\sqrt{1-\alpha^2}}{T}.$

Ответ: $V = \frac{2\pi A\sqrt{1-\alpha^2}}{T}.$

Задача 6. На покоящийся на гладком горизонтальном столе клин массой M с высоты h падает резиновый шарик



массой m и отскакивает под углом α к горизонту. Найти скорость клина после удара. Соударение между шариком и клином считать абсолютно упругим. Трение между столом и клином не учитывать.

Решение:

$\vec{u}_0$-скорость шарика до удара;

$\vec{u}$-скорость шарика после удара;

$\vec{v}$ – скорость клина.

Для тела падающего без начальной скорости с высоты h, имеем

$u_0 = \sqrt{2gh}$.

Из закона сохранения проекции импульса система «шарик + клин» на горизонтальную ось следует, что $mu\,cosa = Mv$.

При упругом соударении шарика и клина сохраняется суммарная кинетическая энергия этих тел: $\frac{mu_0^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$.

Решая систему трёх уравнений получим:

$$v = mcosa\sqrt{\frac{2gh}{M(M + mcos^2\alpha)}}$$

Ответ: $v = mcosa\sqrt{\frac{2gh}{M(M+mcos^2\alpha)}}$.

Задача 7. Одноименные клеммы двух источников ЭДС E_1 и E_2 с внутренними сопротивлениями, соответственно r_1 и r_2, соединили так, что образовалась замкнутая цепь. Затем к клеммам одного из источников подключили идеальный вольтметр. Найти его показания, если E_1=5 В, E_2=2 В, r_1=10 Ом, r_2=5 Ом.

Решение:

Выберем направление тока так, как показано на рис.1.

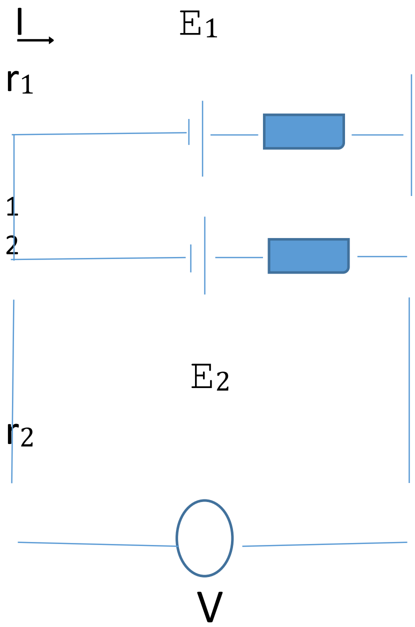


рис.1

Запишем закон Ома для неоднородного участка цепи, включающего первый источник:

$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}_1 = Ir_1$ (1)

Обозначим U искомую разность потенциалов, которую покажет вольтметр.

$\varphi_1 - \varphi_2 = U$

Из (1): $U = Ir_1 - \mathrm{E}_1$ (2)

Чтобы найти ток, запишем закон Ома для замкнутого участка цепи, содержащего оба источника:

$\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 = I(r_1 + r_2)$,

тогда: $I = \frac{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}{r_1 + r_2}$ (3)

Подставляя (3) в (2), найдем:

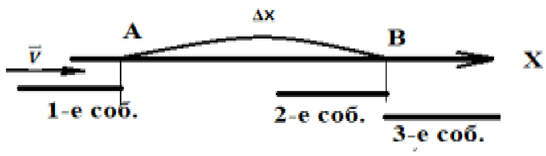
$$U = -\frac{E_2 r_1 + E_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Ответ: $|U| = 3$ В.

Задача 8. Стержень движется с постоянной скоростью относительно лабораторной системы отсчета (ЛСО) в продольном направлении мимо двух меток А и В, расположенных на расстоянии Δx друг от друга (в ЛСО). Сначала в момент времени t_1напротив метки А оказался передний конец стержня. Затем напротив метки В в моменты t_2 и t_3 оказались соответственно передний и задний концы стержня. Найти собственную длину стержня L_0.

Решение:

Нарисуем рисунок, на котором изображены три события, связанные с движущимся стержнем (с точки зрения наблюдателя, находящегося в ЛСО):



1-е событие (произошедшее в момент времени t_1 по часам наблюдателя из ЛСО) - напротив метки «А» оказался передний конец стержня.

2-е событие (произошедшее в момент времени t_2 по часам наблюдателя из ЛСО) - напротив метки «В» оказался передний конец стержня.

3-е событие (произошедшее в момент времени t_3 по часам наблюдателя из ЛСО) - напротив метки «В» оказался задний конец стержня.

С точки зрения наблюдателя в ЛСО движущийся стержень имеет длину

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}\text{, где } \beta = \frac{V}{c}\text{, } V - \text{скорость стержня.}$$

L_0 – собственная длина стержня в той системе отсчета, где этот стержень покоится.

С точки зрения наблюдателя, находящегося в ЛСО, передний конец стержня пролетел расстояние Δx между метками «А» и «В» со скоростью V за время $\Delta t = t_2 - t_1$.

$\Delta x = V\,(t_2 - t_1)$.

Отсюда найдем скорость стержня:

$$V = \frac{\Delta x}{(t_2 - t_1)}.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в ЛСО, стержень пролетел мимо метки «В» за время $\Delta 7{:}\,06 = t_3 - t_2$. Этот факт можно описать соотношением:

$$L = V\,(t_3 - t_2) = \frac{\Delta x}{(t_2 - t_1)}\,(t_3 - t_2).$$

Собственная длина стержня

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta x}{(t_2 - t_1)}\,(t_3 - t_2)\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta x\,(t_3 - t_2)}{\sqrt{\left((t_2 - t_1)\right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}}.$$

Ответ: $L_0 = \dfrac{\Delta x\,(t_3 - t_2)}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}}}$.

2. ВАРИАНТЫ ОЛИМПИАД
2.1 2015-2016 ГОД

9 КЛАСС

Задача 1. В сосуд налита ртуть плотности $\rho_{рт.}$ Поверх ртути налито масло плотности $\rho_{м.}$ Жидкости не перемешиваются. Определить плотность материала шара $\rho_{ш.}$, плавающего так, что n-я часть его объема находится в ртути, а остальная часть шара полностью находится в слое масла.

Решение:

Запишем условие плавания (равновесия) тела на границе двух не перемешивающихся жидкостей (сила тяжести шара уравновешивается силой Архимеда):

$\rho_{ш}Vg = \rho_{рт}nVg + \rho_{м}(1-n)Vg.$

Сокращая Vg, получим искомый ответ.

Ответ: $\rho_{ш} = \rho_{рт}n + \rho_{м}(1-n).$

Задача 2. Искусственный спутник Земли запущен в плоскости экватора так, что он неподвижен относительно земных наблюдателей. Во сколько раз η радиус орбиты спутника R_c больше радиуса Земли $R_З$? $R_З$=6400 км.

Решение:

Движение спутника в околоземном пространстве описывается уравнением

$$m\omega^2 R_с = \gamma m M_З / R_с^2, \qquad (1)$$

где m-масса спутника, ω-частота его вращения (совпадающая с частотой суточного вращения Земли $\omega_З=2\pi/T$. T=24 часа.), γ-гравитационная постоянная, $M_З$-масса Земли.

Сокращая m в выражении (1), получим

$$\omega^2 = \gamma \frac{M_З}{R_c^3}. \qquad (2)$$

Из очевидного равенства $mg = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}$ получим $\gamma M_З = gR_З^2$, и подставим получившееся соотношение в числитель выражения (2):

$$\omega^2 = g\frac{R_З^2}{R_c^3}. \qquad (3)$$

Подставив в (3) $\omega_З=2\pi/T$, и решив полученное уравнение относительно η, ответим на вопрос задачи.

Ответ: $\eta = \frac{R_c}{R_З} = \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2 R_З}} = 6{,}7$ раз.

Задача 3. Какие длины $L_{0ст.}$ и $L_{0м.}$ при температуре $t_0=0^0C$ должны иметь стальной и медный стержни, чтобы при нагревании их до любой температуры разность длин стержней составляла $\Delta L=10$ см? Коэффициенты линейного расширения стали и меди равны соответственно: $\alpha_{ст.}=1{,}2\ 10^{-5}$ град$^{-1}$, $\alpha_{м.}=1{,}7\ 10^{-5}$ град$^{-1}$.

Решение:

Длина каждого из стержней при температуре t будет определяться выражениями

$$L_с = L_{0.c}(1+\alpha_c t). \qquad .\ (1)$$

$$L_м = L_{0.м}(1+\alpha_c t). \qquad .\ (2)$$

Вычитая из (1) (2), получим:

$$L_c - L_м = L_{o.c} - L_{0.м} = L_{0.c}\alpha_c - L_{0.м}\alpha_м. \qquad (3)$$

С учетом условия задачи

$$L_{o.c} - L_{0.м} = L_c - L_м = \Delta L. \qquad (4)$$

выражение (3) примет вид:

$$L_{0.c}\alpha_c - L_{0.м}\alpha_м. = 0 \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (4) и (5), ответим на вопрос задачи.

Ответ: $L_{0.м} = \frac{\Delta L\alpha_c}{\alpha_м - \alpha_с} = 24$ см., $L_{0.с} = \frac{\Delta L\alpha_м}{\alpha_м - \alpha_с} = 34$ см.

Задача 4. Внутреннее сопротивление гальванометра равно $R_г$=30,0 Ом. Сила тока, отвечающая полному отклонению стрелки гальванометра, равна $I_г$=60,0 мкА. Что надо сделать, чтобы превратить гальванометр в амперметр, измеряющий токи с силой до I=15.0 А?

Решение:

Для того, чтобы гальванометр можно было использовать как амперметр, его надо шунтировать, т.е. замкнуть его клеммы сопротивлением $R_ш$. Расчет величины $R_ш$. есть в каждом учебнике элементарной физики. Приводим его без вывода:

$$R_ш = \frac{R_г}{n-1}.$$

Здесь $n=I/I_г$.

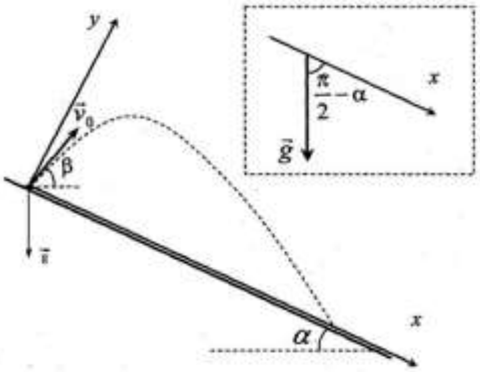
Ответ: $R_ш = \frac{R_г}{n-1} = \frac{R_г}{\frac{I}{I_г}-1} \approx \frac{R_г I_г}{I} = 0{,}12 мОм.$

В аналитической формуле ответа учтено, что $I \gg I_г$.

Задача 5. Тело, находящееся на наклонной плоскости с углом наклона α, бросили вниз, (с горы) под углом β к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти наибольшее расстояние h между телом и плоскостью в процессе полета тела. При каком значении угла β^* это расстояние h будет максимальным? Найти это максимально возможное расстояние $h_{макс.}$ между телом и плоскостью в процессе полета тела.

Решение:

Выберем оси координат следующим образом. Ось Ox направим <u>вниз</u> вдоль наклонной плоскости. Ось Oy направим <u>вверх</u>, перпендикулярно оси Ox и, следовательно, перпендикулярно поверхности наклонной плоскости.



После этого записываем как изменяются со временем координаты тела x(t), y(t) и проекции скоростей тела на оси Ox и Oy $v_x(t)$ $v_y(t)$.

$$x(t) = v_o \cos(\alpha + \beta)\, t + \frac{gsin\alpha\, t^2}{2}\,. \qquad (1)$$

$$y(t) = v_o \sin(\alpha + \beta)\, t - \frac{gcos\alpha\, t^2}{2}\,. \qquad (2)$$

$$v_x(t) = v_o \cos(\alpha + \beta) + gsin\alpha\, t\,. \qquad (3)$$

$$v_y(t) = v_o \sin(\alpha + \beta) - gcos\alpha\, t\,. \qquad (4)$$

Приравнивая нулю выражение (4), найдем время $\tau_{под}$ подъема тела на максимальное относительно наклонной плоскости расстояние

$$\tau_{под} = \frac{v_0 \sin(\alpha+\beta)}{g\, cos\alpha} \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим наибольшее расстояние h между телом и плоскостью в процессе полета тела.

$$h = y(\tau_{под}) = \frac{v_0^2 sin^2(\alpha+\beta)}{2g\, cos\alpha}. \qquad (6)$$

Из последнего выражения следует, что высота подъема тела над наклонной плоскостью (как функция угла β) будет максимальна ($h_{макс.}$), если (α+β)=π/2.

Следовательно, если $\beta^*=\pi/2-\alpha$,

$$h_{макс.} = \frac{v_0^2}{2gcos\,\alpha}$$

Мы использовали при решении задачи не все уравнения 1-4. Они потребуются для решения 5-й задачи других вариантов олимпиады.

Ответ: $h_{\text{макс.}} = \frac{v_0^2}{2g\cos\alpha}$

10 КЛАСС

Задача 1. В балете «Лебединое озеро» прима-балерина Мариинского театра Алина Сомова делает 32 фуэте (оборота вокруг вертикальной оси) за 23 секунды. С какой средней угловой скоростью вращается балерина? Оцените по порядку величины энергию, затрачиваемую ею на первый оборот? Вес балерины 50 кг.

Решение:

Угловая скорость $\omega = 32 \cdot 2\pi/23 = 8{,}7$ рад/с.
Разные точки тела движутся с разной скоростью и имеют разную кинетическую энергию. Для приблизительной оценки энергии вращения сопоставим телу балерины тонкостенный цилиндр массы m = 50 кг и радиуса R = 20 см.

Тогда суммарная кинетическая энергия всех точек цилиндра, раскрученного до угловой скорости ω, будет равна $mv^2/2$, где $v = \omega R$. В результате имеем 378 Дж. В действительности, затраченная балериной энергия на первый оборот больше, так как только примерно четверть выделяемой организмом энергии идет на совершение механической работы.

Задача 2. В погоне за жертвой гепард развивает скорость до 120 км/ч. и, настигая добычу, прыгает на расстояние до 8 метров. Оцените высоту такого прыжка.

Решение:

Скорость гепарда при прыжке направлена под небольшим углом к горизонту. Поэтому можно считать, что длительность полета при прыжке равна его дальности, деленной на скорость, т.е. 0,24 с. Время подъема в высшую точку траектории равно времени спуска. Следовательно, высоту прыжка можно найти из формулы $H = \frac{gt^2}{2}$, где t – время спуска равное половине длительности прыжка. Получается, что высота прыжка не более 0,1 м. Но на такую высоту поднимается центр массы гепарда. Рассматривая прыжок, следует принять во внимание, что во время прыжка животное поджимает и вытягивает вперед лапы, что при небольшом подъеме центра массы позволяет ему успешно преодолевать небольшие препятствия.

Задача 3. Елочная гирлянда состоит из 20 лампочек, соединенных последовательно, и рассчитана на подключение к сети напряжением 220 В. Как изменится мощность излучаемого гирляндой света, если одну лампочку выкрутить, а контакты в патроне закоротить?

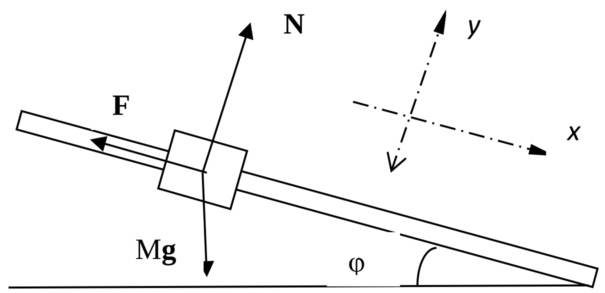
Решение:

Потребляемая гирляндой мощность равна произведению силы тока на напряжение. Так как напряжение в сети не меняется, уменьшение числа лампочек приводит к уменьшению общего сопротивления гирлянды и росту силы тока. Следовательно, потребляемая мощность и мощность излучения возрастут.

Задача 4. На стальной стержень длиной L надета шайба. Если стержень наклонить на угол $\alpha=30^{o}$ и слегка подтолкнуть шайбу, то она движется равномерно. За какое время шайба спустится от верхнего конца стержня до нижнего, если его наклонить на угол $\beta=60^{o}$? ($\beta>\alpha$)

Решение:

Силы, действующие на шайбу при ее движении по стержню, показаны на рисунке.



F, **N**, M**g** – силы трения, нормальной реакции опоры и тяжести соответственно. M – масса шайбы. Ускорение a направлено вдоль стержня. Из второго закона Ньютона имеем:

$Ma = Mg\sin\varphi - F$,

$0 = N - Mg\cos\varphi$.

Сила трения скольжения $F = kN$, где k – коэффициент трения.

При равномерном движении $a = 0$. Следовательно, $k = \mathrm{tg}\alpha$.

При угле наклона β ускорение

а = $g(\sin\beta - k\cos\beta)$. Время спуска t находится из формулы $L = \frac{at^2}{2}$. Подставляя сюда выражения для a и k, получаем:

$t = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin\beta - \mathrm{tg}\alpha\cos\beta)}}$.

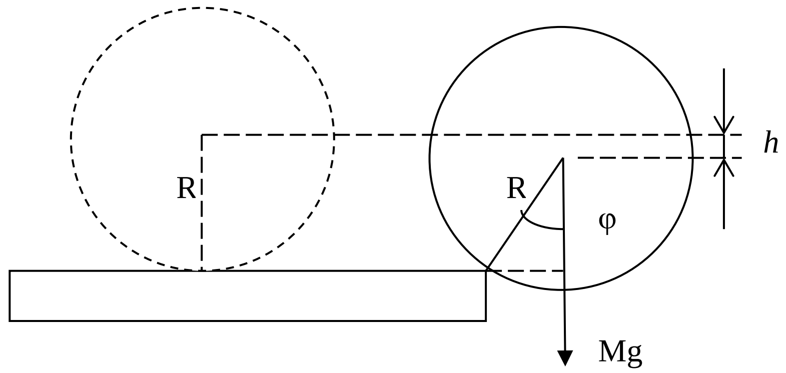
Ответ: $t = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin\beta - \mathrm{tg}\alpha\cos\beta)}}$

Задача 5. Гладкий стальной шарик от подшипника положили на самый край полированного стола. Небольшого сотрясения пола или дуновения воздуха оказалось достаточно, чтобы шарик начал падать. Радиус шарика R, высота стола H. На каком расстоянии по горизонтали от края стола упадет шарик? Радиус шарика много меньше высоты стола.

Решение:

В момент отрыва шарика от стола сила реакции опоры равна нулю, т.е. на шарик действует только сила тяжести. В этот момент движение шарика можно представить, как вращение вокруг края стола со скоростью центра шарика v. В проекциях на радиус второй закон Ньютона дает: $Ma = Mg\cos\alpha$, где M – масса шарика, a – центростремительное ускорение, $a = \frac{v^2}{R}$.

Скорость может быть найдена из закона сохранения энергии: $MgH = \frac{Mv^2}{2}$, где $H = (R - R\cos\varphi)$, см. рис.



Из этих соотношений находим: $co\,s\,\varphi = \frac{2}{3}$. Скорость направлена в этот момент перпендикулярно радиусу шарика. Ее горизонтальная составляющая равна $v\cos\varphi$. Так как высота стола по условию много больше радиуса шарика, вертикальной составляющей начальной скорости и величиной h можно пренебречь, и время падения t найти из формулы $h = \frac{gt^2}{2}$. Тогда расстояние от края стола по горизонтали, на котором упадет шарик, $S = (vcos\varphi)t = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{RH}{3}}$.

Ответ: $S = (vcos\varphi)t = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{RH}{3}}$.

11 КЛАСС

Задача 1. Ромб составлен из жестких стержней длиной L. Стержни скреплены на концах шарнирами. В начальный момент два противоположных шарнира находятся рядом (очень близко) и имеют нулевые скорости. Один из этих шарниров закреплён. Второй начинают двигать с постоянным ускорением a. Найдите величину ускорения остальных шарниров ромба в тот момент, когда ромб превратится в квадрат, если все стержни двигаются, оставаясь в одной плоскости.

Решение:

Для удобства рассмотрения пронумеруем вершины ромба так, как показано на рисунке 2. Поскольку характер движения вершин 2 и 4 одинаково, будем рассматривать только вершину 1.

В момент времени, когда ромб превратится в квадрат, двигающаяся с ускорением a вершина 3 будет иметь скорость v. К этому моменту времени вершина 2 сместится в направлении движения вершины 3 на вдвое меньшее расстояние, чем прошла вершина 3. Значит, проекции скорости и ускорения вершины 2 на направление движения вершины 3 будут равны $v/2$ и $a/2$ соответственно. К рассматриваемому моменту времени вершина 3 пройдет путь $S = L\sqrt{2}$.

Поэтому $v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2aL\sqrt{2}} = 2^{3/4}\sqrt{aL}$.

Так как стержни жесткие, то вершина 2 все время движется по окружности радиусом L с центром в вершине 1. Поэтому скорость u вершины 2 направлена по касательной к этой окружности, то есть в рассматриваемый момент времени направлена вдоль стержня, соединяющего вершины 2 и 3. Следовательно, можно записать

$$u = \frac{v/2}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{v}{\sqrt{2}} = 2^{1/4}\sqrt{aL}.$$

Проекция ускорения вершины 2 на направление стержня, соединяющего ее с вершиной 1, есть центростремительное ускорение, равное $\frac{u^2}{L} = a\sqrt{2}$.

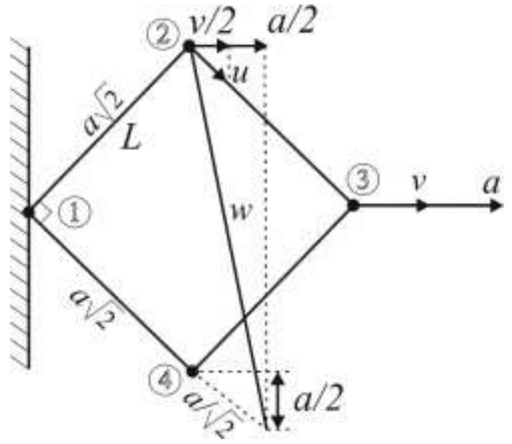


рис. 1.

Мы нашли проекции ускорения вершины 2 на два различных направления. Полное ускорение можно найти, нарисовав соответствующим образом направленные векторы компонентов ускорения, имеющие длины $a/2$ и $a\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляры к ним. Точка пересечения этих перпендикуляров позволит определить направление и величину вектора ускорения вершины 2. Чертеж удобно построить следующим образом. Выберем масштаб так, чтобы вектор $a/2$ на чертеже имел длину, равную четверти диагонали нашего квадрата. Тогда вектор $a\sqrt{2}$ будет иметь длину, равную стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора получаем:

$$w = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}})^2} = a\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Ответ: $w = a\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Задача 2. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом 45° при основании. По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой m(см. рисунок). Чему должна быть ровна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложение к клину, чтобы ускорение тела массой m было направленно горизонтально? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно g.

Решение:

На тело массой m действует сила тяжести $m\vec{g}$ силы реакции опоры $\vec{N}$ со стороны клина.

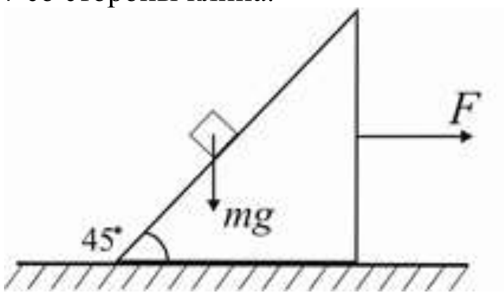


рис. 2.1

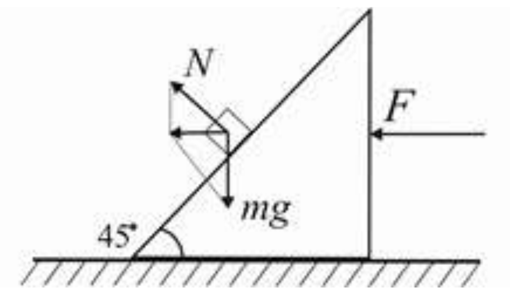


рис. 2.2

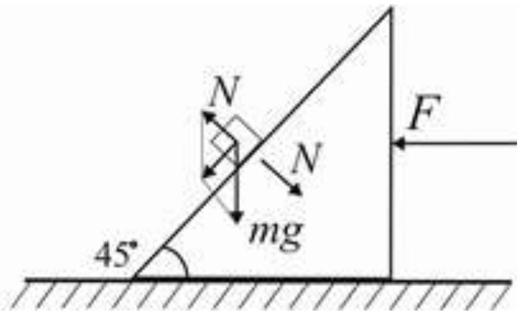


рис. 2.3.

Как видно из рисунка 2.2, ускорение тела будет горизонтально, если $N = mg\sqrt{2}$. При этом равнодействующая сил, приложенных к телу, равна mg и направлено влево. Поэтому ускорение тела направлено влево и равно по величине g. Для того, чтобы в процессе движения клин давил на тело с необходимой силой $\vec{N}$, он также должен двигаться влево с таким же по величине ускорением g. Чтобы сообщить и клину, и телу такое ускорение, к клину необходимо приложить направленную влево силу $F = (m + M)g$.

Ответ: $F = (m + M)g$.

Задача 3. Искусственный спутник Земли запущен в плоскости экватора так, что он движется по круговой орбите в направлении вращения земли («обгоняя» Землю). Во сколько раз η радиус орбиты спутника R_c больше радиуса Земли $R_З$, если спутник периодически проходит над заданной точкой Земли ровно через n=2 суток? $R_З$=6400 км.

Решение:

$$(\omega - \omega_з)nT = 2\pi$$

$$\omega_з = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{nT} + \omega_з = \frac{2\pi}{nT} + \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$m\omega^2 R_c = \gamma \frac{mM_з}{R_c^2}$$
$$\omega^2 = \gamma \frac{M_з}{R_c^2}$$
$$mg = \gamma \frac{mM_з}{R_з^2}$$
$$\gamma M_з = gR_з^2$$
$$\omega^2 = g\frac{R_з^2}{R_c^2}$$
$$\eta = \frac{R_с}{R_3} = \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_3}} = \sqrt[3]{\frac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_3 (n+1)^2}} = 5.$$

Ответ: $\eta = 5$.

Задача 4. По П-образной рамке, наклоненной под углом α к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать перемычка массой *m*. Длина перемычки *l*, ее сопротивление *r*, индукция поля *B*, коэффициент трения между перемычкой и рамкой μ. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

Решение:

$$mg\sin\alpha - F_A - F_{тр} = 0$$
$$N = mg\cos\alpha$$
$$F_{тр} = \mu N$$
$$F_A = IlB$$
$$I = \frac{\xi}{r}$$
$$\xi = BLv$$

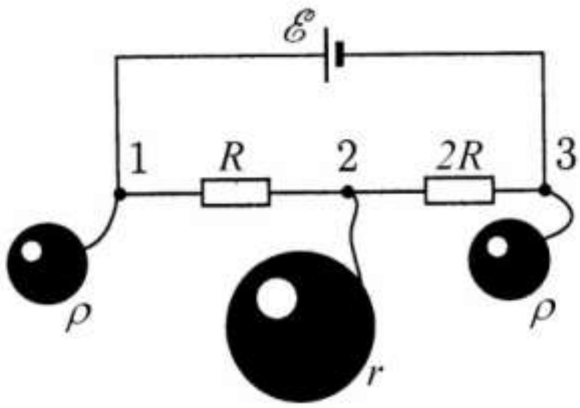
Решая получившуюся систему, получаем:

$$v = \frac{mgr(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2 l^2}$$

Ответ: $v = \frac{mgr(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2 l^2}$.

.

Задача 5. К точкам 1, 2, 3 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами ρ, r и ρ соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, внутреннее сопротивление источника тока равно нулю, ЭДС батареи известен и равен ξ.



Решение:

Пусть Q_1, Q_2, Q_3 – заряды шаров после их подсоединения к цепи. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на электрической цепи и соединительных проводниках мал, то $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$. Найдем разность потенциалов между точками 1и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\rho} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\xi}{3},$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{2\xi}{3}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\rho\xi(r+3\rho)}{3r};\ Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\xi\rho(3\rho-2r)}{3r};\ Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\xi\rho.$$

Ответ: $Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\rho\xi(r+3\rho)}{3r};\ Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\xi\rho(3\rho-2r)}{3r};\ Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\xi\rho.$

2.2 2016-2017 ГОД

9 КЛАСС

Задача 1. В комнате с объемом $V = 4$ м^3 при температуре $t = 20^0$С относительная влажность воздуха $В_1 = 20\%$. Какую массу воды m надо испарить, чтобы увеличить относительную влажность воздуха до $В_2 = 50\%$?

Плотность насыщающих водяных паров при различных температурах			
Т, К^0	$\rho_н$, 10^{-3} кг/м^3	Т, К^0	$\rho_н$, 10^{-3} кг/м^3
288	12,80	295	19,40
289	13,60	296	20,60
290	14,50	297	21,80
291	15,40	298	23,00
292	16,30	299	24,40
293	17,30	300	25,80
294	18,30	301	27,20

Решение:

$m = m_2 - m_1$, где m_2 и m_1 – массы водяного пара после и до испарения воды в комнате.

По определению абсолютная ρ и относительная В влажности воздуха при соответствующей температуре связаны соотношением

$$\rho = В\rho_{нас},$$

где $\rho_{нас}$,- плотность насыщающего пара при той же температуре, которая находится из вышеприведенной таблицы «**Плотность насыщающих водяных паров при различных температурах**».

Для данной задачи $\rho_{нас}(t = 20^0\text{С}, t = 293^0K) =$
$= 17{,}30 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

Массы водяного пара в комнате с объемом V до и после испарения дополнительной массы воды равны соответственно:

$$m_1 = \rho_1 \cdot V = B_1 \cdot \rho_{нас} \cdot V; m_2 = \rho_2 \cdot V = B_2 \cdot \rho_{нас} \cdot V.$$

Используя последние соотношения, получаем:

$$m = m_2 - m_1 = B_2\rho_{\text{нас}}V - B_1\rho_{\text{нас}}V = (B_2 - B_1)\rho_{\text{нас}}V =$$
$$= (0{,}5 - 0{,}2) \cdot 17{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \ = \ 207{,}6 \text{ г.}$$

Ответ: $m = 207{,}6$ г.

Задача 2. Две лодки (массы M каждая) идут с одинаковой скоростью $\overrightarrow{v_0}$ одна за другой по стоячей воде. Из первой лодки во вторую перебрасывают груз массы m. Горизонтальная составляющая скорости груза относительно лодки в момент броска $\vec{u}$. Найти скорости лодок $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$ после переброски груза. Векторы $\vec{u}$ и $\overrightarrow{v_0}$ коллинеарны.

Решение:

Опишем в инерциальной системе отсчета, связанной с берегом, акт выброса груза из первой лодки, применив закон сохранения импульса для системы тел «1-я лодка + груз»:

$$(m + M)\overrightarrow{v_0} = m\vec{U} + M\overrightarrow{v_1} \qquad (1)$$

Здесь $\vec{U}$ – скорость выброшенного груза относительно берега:

$$\vec{U} = \vec{u} + \overrightarrow{v_1} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), и решая полученное уравнение относительно $\overrightarrow{v_1}$, получим:

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_0} - \vec{u}\ \frac{m}{m+M} \qquad (3)$$

Опишем в инерциальной системе отсчета, связанной с берегом, акт падения груза во вторую лодку, применив закон сохранения импульса для системы тел «2-я лодка + груз»:

$$M\overrightarrow{v_0} + m\vec{U} = (M + m)\overrightarrow{v_2} \qquad (4)$$

Подставляя в (4) (2) {а в (2) только что полученное (3)}, найдем:

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_0} + \vec{u}\ \frac{mM}{(m+M)^2} \qquad (5)$$

Векторы $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{u}$ имеют противоположные направления (по существу условия задачи). Это означает, что величина скорости первой лодки после переброски груза увеличится, а величина скорости второй лодки после переброски груза уменьшится.

Задача 3. Два сосуда объемами $V_1 = 5$ м^3 и $V_2 = 3$ м^3 содержат воздух при температурах $t_1 = 15^0$С и $t_2 = 28^0$С и относительной влажности $B_1 = 22\%$ и $B_2 = 46\%$ соответственно. Определить относительную влажность воздуха В после соединения между собой этих сосудов, если установившаяся температура воздуха $t = 20^0$С.

Плотность насыщающих водяных паров при различных температурах			
Т, К^0	$\rho_н$, 10^{-3} кг/м^3	Т, К^0	$\rho_н$, 10^{-3} кг/м^3
288	12,80	295	19,40
289	13,60	296	20,60
290	14,50	297	21,80
291	15,40	298	23,00
292	16,30	299	24,40
293	17,30	300	25,80
294	18,30	301	27,20

Решение:

Используя таблицу, выпишем плотности насыщающих водяных паров $\rho_н$ в каждом из сосудов:

$$\rho_{н1}(t_1 = 15^0C => 228^0K) = 12{,}80 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_{н2}(t_2 = 28^0C => 301^0K) = 27{,}20 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Определим массу водяных паров в каждом из сосудов:

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1, m_2 = \rho_2 \cdot V_2.$$

По определению относительная влажность воздуха B связана с его абсолютной влажностью ρ следующим соотношением:

$B = \frac{\rho}{\rho_н}$, где $\rho_н$ – плотность насыщенного пара (при соответствующей температуре).

С учетом вышесказанного можно записать:

$$\rho_1 = B_1 \cdot \rho_{н1}, \rho_2 = B_2 \cdot \rho_{н2} => m_1 = B_1 \cdot \rho_{н1} \cdot V_1,$$
$$m_2 = B_2 \cdot \rho_{н2} \cdot V_2.$$

Найдем плотность водяного пара после соединения сосудов:

$$\rho = \frac{m_1+m_2}{V_1+V_2} = \frac{B_1 \cdot \rho_{н1} \cdot V_1 + B_2 \cdot \rho_{н2} \cdot V_2}{V_1+V_2}.$$

Относительная влажность воздуха (по определению) после соединения сосудов будет равеа:

$B = \frac{\rho}{\rho_н} = \frac{B_1 \cdot \rho_{н1} \cdot V_1 + B_2 \cdot \rho_2 \cdot V_2}{\rho_н \cdot (V_1+V_2)}$, где $\rho_н(t = 20^0 C => 293^0 K) = 17{,}30 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, снова берется из таблицы.

Подставляя все численные данные в последнюю формулу, получаем $B = 0{,}37$ (или 0,37%).

Ответ: $B = 0{,}37$.

10 КЛАСС

Задача 1. Авианосный крейсер «Адмирал Кузнецов» идет со скоростью 30 км/ч. Сколько времени потребуется катеру, движущемуся параллельным курсом со скоростью 50 км/ч, для того чтобы пройти от кормы крейсера до носа и обратно к корме, если длина крейсера 306 м?

Решение:

Для решения задачи необходимо перейти в систему отсчета, связанную с крейсером, и найти время движения катера туда и обратно:

$t = \frac{L}{v+u} + \frac{L}{v-u}$, где v и u – скорости катера и крейсера соответственно, L – длина крейсера. Подставляя значения этих величин, получаем $t = 1{,}1$ минуты.

Ответ: $t = 1{,}1$ минуты.

Задача 2. Пластина массой M подвешена за ее середину на резиновом шнуре. Вдоль шнура с высоты h на пластину падает плашмя шайба (шнур проходит через отверстие в шайбе) и прилипает к пластине. Масса шайбы m, жесткость шнура k. Какую максимальную скорость будет иметь пластина с шайбой при движении после удара?

Решение:

До соударения с шайбой пластина находилась в равновесии, т.е. сумма сил, действующих на пластину, равнялась нулю $Mg = kl_0$, где l_0 – первоначальное растяжение шнура. Скорость шайбы в момент удара о пластину $u_0 = \sqrt{2gh}$. Из закона сохранения импульса имеем $mu_0 = (m + M)u$, где u – скорость пластины с шайбой сразу после удара. Максимальную скорость пластина с шайбой будут иметь в том момент, когда их ускорение будет равно нулю. Из второго закона Ньютона следует: $kl - Mg = 0$, где l – соответствующее растяжение шнура. Принимая потенциальную энергию пластины с шайбой в поле силы тяжести в этот момент равной нулю, запишем закон сохранения энергии:

$$(M+m)g(l-l_0) + \frac{k{l_0}^2}{2} + \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{kl^2}{2} + \frac{(M+m)v^2}{2}.$$

Из полученных выражений находим:

$$v = \sqrt{\frac{g^2m^2}{k(M+m)} + \frac{2ghm^2}{(M+m)^2}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{g^2m^2}{k(M+m)} + \frac{2ghm^2}{(M+m)^2}}.$

Задача 3. Два одинаковых баллона наполнены одинаковым количеством гелия. Среднеквадратичная скорость атомов гелия в первом сосуде 1200 м/с, а во втором 2400 м/с. Какой будет среднеквадратичная скорость, если соединить баллоны трубкой?

Решение:

Среднеквадратичную скорость молекул можно найти, используя закон сохранения энергии:

$$2 \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{m{v_1}^2}{2} + \frac{m{v_2}^2}{2}.$$

Здесь $v_1 = 1200$ м/с, $v_2 = 2400$ м/с. Искомая среднеквадратичная скорость будет равна:

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} = 1897\text{м/с}.$$

Ответ: $v = 1897\text{м/с}.$

Задача 4. Реактивный самолет с вертикальным взлетом и посадкой завис над землей, выбрасывая вниз струю газа со скоростью 1200 м/с. Какая масса газы выбрасывается в струе за секунду, если масса самолета 10 тонн?

Решение:

Так как самолет массы M неподвижен, сила тяжести, действующая на него Mg, равна силе реакции F. Такая же сила действует на газ. Изменение импульса порции газа массы m равно:

$mv = F\Delta t$, где v – скорость струи газа, а Δt – время за которое выбрасывается газ массы m, причем изменением массы самолета с топливом за это время пренебрежимо мало.

Отсюда расход газа: $\frac{m}{\Delta t} = \frac{Mg}{v} = 83$ кг/с.

Ответ: $\frac{m}{\Delta t} = 83 \text{кг/с}$.

Задача 5. Беспилотный космический корабль совершил посадку на далекой планете. При этом в корпусе корабля образовалось небольшое отверстие. Атмосфера планеты очень разряженная, настолько, что, пролетая через отверстие, молекулы не сталкиваются друг с другом. Давление атмосферы планеты p_0, а температура T_0. Какое давление p установится внутри корпуса корабля, если в нем поддерживается температура в два раза больше, чем снаружи?

Решение:

Поскольку молекулы не сталкиваются в пределах отверстия, потоки молекул в обе стороны в установившемся состоянии должны быть равны. Следовательно, $nv = n_0 v_0$, где n, v и n_0, v_0 – концентрации молекул внутри и снаружи корабля и их скорости вдоль отверстия. Используя формулу для давления $p = nkT$, где k – постоянная Больцмана, и то, что средняя (по модулю) скорость пропорциональна корню квадратному из температуры, находим:

$$p = p_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Ответ: $p = p_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}.$

Задача 6. В цилиндре под поршнем находится гелий. Во сколько раз изменится среднеквадратичная скорость его молекул, если объем газа увеличить в 1,5 раза и одновременно давление увеличить в 1,5 раза?

Решение:

Среднеквадратичная скорость $v = \sqrt{3kT}$, где T – температура газа, k – постоянная Больцмана, давление $p = nkT$, где $n = \frac{N}{V}$, где N – число молекул в цилиндре, V – объём занимаемый газом. Так как число молекул не изменяется, из этих соотношений получаем, что отношение среднеквадратичной скорости к первоначальной v_0 равняется $\frac{v}{v_0} = 1{,}5$.

Ответ: $\frac{v}{v_0} = 1{,}5$.

11 КЛАСС

Задача 1. Легкая соломинка массы $m = 1$ г и длины $L =$ 4 см плавает на поверхности воды. По одну сторону от соломинки налили мыльный раствор. С каким ускорением w начнет двигаться соломинка? Сопротивлением воды движению соломинке пренебречь. Поверхностные натяжения воды и мыльного раствора равны соответственно $\sigma_{\text{в}} = 7{,}4 \cdot 10^{-2}$ Н/м и $\sigma_{\text{м.р.}} = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Решение:

Благодаря смачиванию на соломинку (в горизонтальном направлении, перпендикулярном оси соломинки) действуют нескомпенсированные силы:

$F_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}} L$ – со стороны воды,

$F_{\text{м.р.}} = \sigma_{\text{м.р.}} L$ – со стороны мыльного раствора.

Применим 2-й закон Ньютона для описания динамики соломинки:

$$mw = F_{\text{в}} - F_{\text{м.р.}} = \sigma_{\text{в}} L - \sigma_{\text{м.р.}} L$$

Искомое ускорение соломинки:

$$w = \left(\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{м.р.}}\right) \cdot \frac{L}{m} = (7{,}4 - 4{,}0) \cdot 10^{-2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} = 1{,}36\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $w = 1{,}36\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 2. Саша один раз раздвинул пластины плоского конденсатора, которые все время были подключены к источнику напряжения, а в другой раз они были отключены после первоначальной зарядки. В каком из этих двух случаев Саша совершил большую работу на раздвижение пластин? Ответ пояснить.

Решение:

В первом случае при раздвижении пластин разность потенциалов остается постоянной, но емкость, а следовательно, и заряд на пластинах уменьшаются. Это вызовет постепенное уменьшение силы взаимодействия пластин. Во втором случае заряд на пластинах остается постоянным. А так как поле однородно, то сила взаимодействия пластин сохранит начальное значение во все время раздвижения пластин. Поэтому при одинаковом перемещении пластин работа во втором случае будет больше.

Задача 3. Два небольших шарика массой m, заряда q каждый, соединены непроводящей нитью длины $2l$ и лежат на гладком горизонтальном столе. В некоторый момент времени середина нити начинает двигаться с постоянной скоростью V, перпендикулярной направлению нити в начальный момент времени. Определите, минимальное расстояние d, на которое сблизятся шарики.

Решение:

Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с движущимся центром нити. Тогда в начальный момент времени шарики имеют одинаковую скорость V.

Первоначальный запас энергии в системе равен:

$$W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, 2l} + \frac{2mV^2}{2}.$$

В момент наибольшего сближения энергия системы равна:

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, d}.$$

Из закона сохранения энергии получим ответ:

$$d = \frac{2lq^2}{(q^2 + 8\pi\varepsilon_0 mV^2 l)}.$$

Ответ: $d = \frac{2lq^2}{(q^2+8\pi\varepsilon_0 mV^2 l)}$.

Задача 4. Ракета влетает в неподвижное облако частиц с начальной скоростью V_0 и движется в нем с ускорением a.

Частицы налипают на переднюю поверхность ракеты площадью S. Концентрация частиц n, масса каждой частицы m, а самой ракеты M_0. Определить силу реактивной тяги двигателей ракеты.

Решение:

Рассчитаем скорость V и массу M ракеты через промежуток времени t, который прошел после того, как ракета вошла в облако. Двигаясь в облаке, ракета поглощает все частицы, которые находились внутри «коридора», по которому она двигалась. Объем «коридора» равен пути ракеты внутри облака, умноженной на площадь передней стенки. В каждом кубическом метре находится n частиц.

$$V = V_0 + at \qquad (1)$$

$$M = M_0 + (V_0 t + \frac{at^2}{2}) nSm \qquad (2)$$

Найдем силу реактивной тяги F из условия:

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad (3)$$

где $p = MV$:

$$F = (V_0 + at)^2 nSm + \left(M_0 + \left(V_0 t + \frac{at^2}{2}\right) nSm\right) a$$

Ответ: $F = (V_0 + at)^2 nSm + \left(M_0 + \left(V_0 t + \frac{at^2}{2}\right) nSm\right) a.$

Задача 5. Маша сообщила равные отрицательные заряды двум металлическим шарам, имеющим разные диаметры, затем она соединила шары проводом большого сопротивления с последовательно включенным амперметром. Что покажет амперметр. Ответ пояснить.

Решение:

Ток будет направлен от большего шара к меньшему. Направление тока определяется знаком разности потенциалов двух эквипотенциальных поверхностей: ток направлен от большего потенциала к меньшему. В данном случае емкость малого шара меньше, поэтому при равных отрицательных зарядах потенциал малого шара будет меньше, чем потенциал большого.

Задача 6. Два небольших шарика с зарядами q_1 и q_2 вначале двигались с одинаковыми по модулю и направлению скоростями по гладкому горизонтальному столу. После того как на некоторое время было включено однородное электрическое поле, вектор скорости 1-го шарика повернулся на 60° градусов, а модуль его скорости уменьшился в два раза. Второй шарик стал двигаться в перпендикулярном к первоначальному направлении. Определите модуль отношения заряда к массе для 2-го шарика, если для 1-го он равен k_1. Электростатическим взаимодействием шариков пренебречь.

Решение:

Пусть V_1 и V_2 будут соответственно скорости 1-го и 2-го шариков после выключения однородного электрического поля. По условию задачи угол между скоростью V_1 и начальной скоростью V равен 60° градусам. Поэтому изменение импульса Δp_1 1-го шарика равно

$$\Delta p_1 = q_1 E \Delta t = m_1 V sin\frac{\pi}{3}.$$

Здесь мы использовали условие $V_1 = \frac{V}{2}$, из которого следует, что направление изменения импульса 1-го шарика Δp_1 перпендикулярно направлению его скорости V_1.

Так как $\vec{E}||\Delta p_1$ и направление изменения импульса 2-го шарика параллельно направлению Δp_1, то для скорости 2-го шарика получим (легко догадаться, кстати, что знаки зарядов шариков совпадают):

$$V_2 = Vtg\frac{\pi}{6} = \frac{V}{\sqrt{3}}.$$

Соответствующее изменение импульса 2-го шарика равно:

$$\Delta p_2 = q_2 E \Delta t = \frac{m_2 V}{cos\frac{\pi}{6}}.$$

Отсюда получим, что:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 sin\frac{\pi}{3}}{m_2/cos\frac{\pi}{6}},$$

$$\frac{q_2}{m_2} = \frac{4}{3}\frac{q_1}{m_1} = \frac{4}{3}k_1.$$

Ответ: $\frac{q_2}{m_2} = \frac{4}{3}k_1$.

Задача 7. Санки массой M_0 тянут так, что они движутся равномерно со скоростью V_0. При начавшемся снегопаде снежинки налипают на верхнюю поверхность санок площадью S. Концентрация снежинок n, масса каждой снежинки m, а их скорость у поверхности земли равна V. Определить, как должна зависеть от времени сила, с которой тянут санки, чтобы они продолжали двигаться с той же скоростью V_0. Коэффициент трения равен μ.

Решение:

На санки действуют сила тяги, сила тяжести, реакция опоры и сила трения. Направим ось X по направлению движения санок, тогда в проекции на эту ось:

$$\frac{dp}{dt} = F_{тяги} - F_{тр}, \text{ где } p = MV_0,$$

$$M = M_0 + \Delta M(t), \text{ где } \Delta M(t) = mnSVt \text{ при } V_0 = const,$$

$$F_{тяги} = F_{тр} + V_0\frac{dM}{dt} = \mu Mg + V_0\frac{dM}{dt},$$

откуда: $F_{тяги} = \mu M_0 g + (V_0 + \mu g t)mnSV$

Ответ: $F_{тяги} = \mu M_0 g + (V_0 + \mu g t)mnSV$.

Задача 8. Два мыльных пузыря с радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 5$ см, выдуты на противоположных концах одной трубки. Найти разность давлений Δp на концах трубки. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma_{\text{м.р.}} = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Решение:

Избыточное давление, обусловленное поверхностным натяжением, внутри мыльного пузыря (учитываем, что в мыльном пузыре две поверхности внутренняя и внешняя) равно:

$$p = \frac{4\sigma}{r},$$

отсюда разность давлений на концах трубки равна:

$$\Delta p = \frac{4\sigma\,(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5}{5 \cdot 10 \cdot (10^{-2})} = 1{,}6 \text{ Па}.$$

Ответ: $\Delta p = 1{,}6$ Па.

Задача 9. Маша обнаружила двухпроводную линию постоянного тока. Как при помощи вольтметра постоянного тока и магнитной стрелки она определила, на каком конце линии находится электростанция? Ответ пояснить.

Решение:

Включая между точками *A* к *B* вольтметр (рис. 1), можно определить, какая из точек имеет более высокий потенциал. Пусть у точки *A* потенциал выше, чем у точки *B*. Затем нужно поднести снизу к соответствующему проводу, например к верхнему, магнитную стрелку, насаженную на вертикальное острие. По отклонению северного полюса магнитной стрелки можно определить направление тока в проводе.

Например, если северный полюс магнитной стрелки отклонится из плоскости рисунка на читателя, то, значит, ток в этом проводе течет через точку *A* справа налево. Отсюда следует, что генератор в рассматриваемом примере расположен справа от точки *A*. Расположение его слева отточки *A* невозможно, так как возникнет противоречие одному из условий, найденных опытным путем: направлению тока или расположению потенциалов плюс и минус.

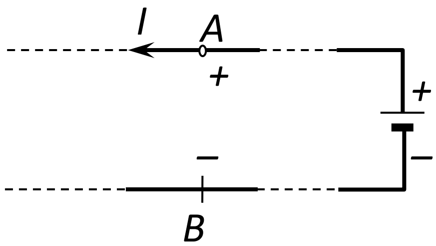


Рис. 1

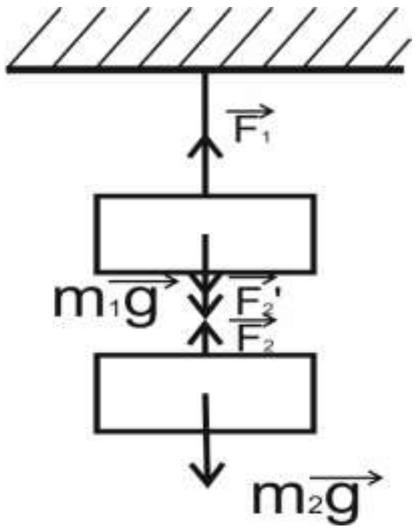
2.3 2017-2018 ГОД

9 КЛАСС

Задача 1. К потолку на невесомой нити подвешен груз 1. В свою очередь, к нижней части этого груза на невесомой нити подвешен груз 2. Отношение сил натяжения верхней и нижней нитей известно: $\frac{F_1}{F_2} = n$. Найти отношение масс грузов $\mu = \frac{m_1}{m_2}$.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи, и изобразим на нем все силы, действующие на висящие тела.



Запишем условие равновесия нижнего (2-го) тела (в проекции на вертикальную ось): $m_2 g \ = \ F_2$.

Запишем условие равновесия верхнего (1-го) тела (в проекции на вертикальную ось): $m_1 g + F_2 = F_1$.

Поделив второе выражение на F_2, получим:

$n = \frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{m_1}{m_2} = 1 + \mu.$

Окончательно имеем:

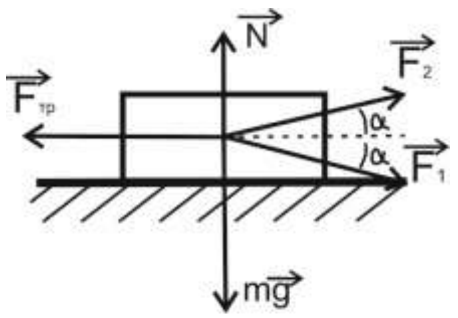
$\mu = n - 1.$

Ответ: $\mu = n - 1.$

Задача 2. Если к телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложить силу $F = 120$ Н, направленную вниз (к земле) под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, то тело будет двигаться без ускорения. С каким ускорением а будет двигаться это же тело, если ту же силу направить вверх (от земли) под тем же углом α к горизонту? Масса тела $m = 25$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\sin 60° = 0{,}87$.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи, и изобразим на нем все силы, действующие на тело (для обоих условий задачи).



Напишем уравнения, определяющие движение тела без ускорения (1-е условие задачи) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:

$0 = ma = F \cdot cos\,\alpha - F_{\text{тр.1}}.$

$mg + \ F \cdot sin\,\alpha = N_1.$

Оба выражения дают нам возможность найти силу трения скольжения

$F_{\text{тр.1}} = F \cdot cos\,\alpha$,

$F_{\text{тр.1}} = k \cdot N_1 = k \cdot (mg + F \cdot sin\,\alpha).$

Приравняв последние два выражения, найдем необходимый (для дальнейшего решения задачи) коэффициент трения скольжения:

$k = \frac{F \cdot \cos\alpha}{mg + F \cdot \sin\alpha}.$

Напишем уравнения, определяющие движение тела с ускорением (2-е условие задачи) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:

$ma = F \cdot cos\,\alpha - F_{\text{тр.2}}.$

$mg = \ F \cdot sin\,\alpha + N_2.$

Найдем из последнего выражения силу трения скольжения $F_{\text{тр.2}}$.

$F_{\text{тр.2}} = k \cdot N_2 = k \cdot (mg - \ F \cdot sin\,\alpha).$

У нас есть все, чтобы ответить на вопрос задачи – найти ускорение, с которым будет двигаться тело:

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр.2}}}{m} = \frac{F \cdot \cos\alpha - \frac{F \cdot \cos\alpha}{mg + F \cdot \sin\alpha}(mg - F \cdot \sin\alpha)}{m}.$$

Упрощая выражение для а, окончательно получим:

$$a = \frac{F^2 \cdot \sin 2\alpha}{m(mg + \ F \cdot \sin\alpha)} = 1.4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $a = \ 1.4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Задача 3. Какое напряжение U показывает вольтметр с внутренним сопротивлением $R = 10$ Ом, если через него за время $\tau = 10$ с протекает электрический заряд $q = 1$ Кл? Сила тока, текущего через прибор, постоянна.

Решение:

Показание вольтметра определяются выражением $U = I \cdot R$, где I – ток, текущий через прибор, R – внутреннее сопротивление вольтметра. Так как сила тока I, текущего через прибор, постоянна, она легко находится из условия задачи: $I = q/\tau$. Окончательно имеем:

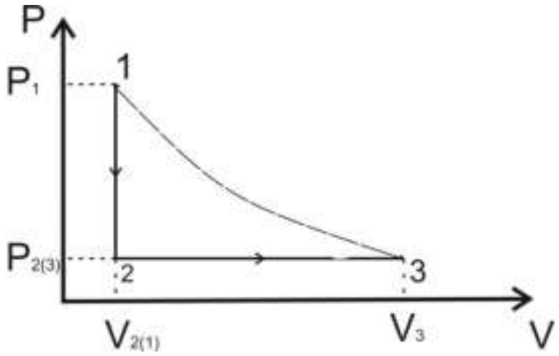
$$U = qR/\tau = 1 \text{ В}.$$

Ответ: $U = 1$ В.

Задача 4. Один моль идеального газа, взятого при температуре $T_0 = 300$ К, изохорически охладили так, что его давление в сосуде упало в $n = 3$ раза. Затем газ изобарически расширили так, что его температура стала равной первоначальной. Какое количество теплоты Q получил газ в указанном эксперименте? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}314\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$.

Решение:

Изобразим в «координатах» PV два последовательных процесса (изохорический (1⟼2) и изобарический (2⟼3)), в которых участвует 1 моль идеального газа согласно условию задачи.



Для каждого из процессов напишем 1-е начало термодинамики:

$Q_{1\to2} = \Delta U_{1\to2} + A_{1\to2}$.

$Q_{2\to3} = \Delta U_{2\to3} + A_{2\to3}$.

Сложив эти два выражения, получим:

$Q = Q_{1\to2} + Q_{2\to3} = \Delta U_{1\to3} + A_{2\to3}$.

Здесь мы учли, что газ при изохорическом охлаждении не совершал работы ($A_{1\to2} = 0$).

Согласно условию задачи начальная (1-я) и конечная (3-я) точки состояния газа принадлежат одной изотерме. Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от одного термодинамического параметра – температуры – $\Delta U_{1\to3} = 0$. В результате получаем, что количество теплоты Q, которое получил газ в указанном эксперименте, определяется только работой газа при изобарическом процессе:

$$Q = A_{2\to3} = P_2 \cdot \left(V_3 - V_{2(1)}\right) = \frac{P_1}{n} \cdot V_1 \left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right) = \frac{P_1 \cdot V_1}{n}\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right) = \frac{R \cdot \mathrm{T}_0}{n}\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right).$$

Учтем еще раз, что начальная (1-я) и конечная (3-я) точки состояния газа принадлежат одной изотерме:

$P_1V_1 = P_3V_3 \to P_1V_1 = \frac{P_1}{n} \cdot V_3 \to V_1 = \frac{1}{n} \cdot V_3 \to \frac{V_3}{V_1} = n.$

Окончательно имеем:

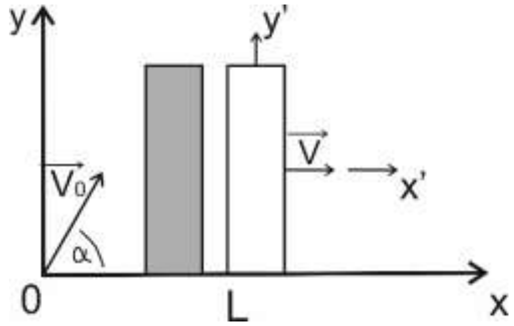
$Q = R\mathrm{T}_0 \cdot (\frac{n-1}{n}) = 1{,}7$ кДж.

Ответ: $Q = 1{,}7$ кДж.

Задача 5. Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ после броска произошло столкновение шарика со стенкой? На каком расстоянии L от точки бросания шарика находилась стенка когда произошло столкновение шарика со стенкой?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$x(t) = v_0 \cos\alpha \ t,$ для времен $t \leq \tau.$

$y(t) = v_0 \sin\alpha \ t - \dfrac{gt^2}{2},$ для времен $t \leq t_{\text{падения шарика на землю}}.$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$X(t) = L_0 + Vt.$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha \cdot \tau = L_0 + V\tau$.

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (1)$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$, для времен $t \le \tau$.

$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt,$ для времен $t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$.

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$.

Акт <u>упругого</u> соударения шарика с <u>очень тяжелой</u> (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени (τ+0), следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время упругого столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$$
$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$$
$$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau + 0) < 0, \text{т. е. } 2V < v_0 \cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + v_x(t)t, \tau < t < \tau + \tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2 \qquad (3)$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (5)$$

Ответ: $\tau_2 = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V}, L = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V}$.

10 КЛАСС

Задача 1. Флейта Пана представляет собой набор трубок разной длины из тростника, закрытых с нижнего конца. Если дуть на верхний конец трубки она издает звук. Какой должна быть длина трубки, чтобы звучала нота Соль второй октавы. Этой ноте соответствует частота звука 880 Гц. Скорость звука 340 м/с. Как изменится звук, если тростниковые трубки заменить на медные?

Решение:

Флейта Пана представляет собой набор трубок, открытых с одного конца и закрытых с другого. Если подуть поперек открытого конца трубки, в ней возникают колебания воздуха, и она начинает звучать. Колебания достигают наибольшей амплитуды тогда, когда вдоль трубки образуется стоячая звуковая волна (явление резонанса). В противном случае они быстро гаснут. У открытого конца трубки возникает пучность стоячей волны, а у закрытого – узел. Таким образом, длина трубки открытой с одного конца соответствует четверти длины волны звука. Частота звучания $f = v/4L$, где v – скорость звука, L – длина трубки. Эта частота является основной. Сильные колебания возникают также на частотах, для которых на длине трубки укладывается три четверти волны, пять и т.д. Но эти колебания будут существенно слабее колебаний на основной частоте. Их амплитуды определяют тембр звука.

Материал труб влияет на затухание колебаний на разных частотах и, тем самым, на тембр, но не на основную частоту.

Задача 2. Вычислить концентрацию и оценить среднее расстояние $\langle r\rangle$ между молекулами азота при условиях близких к нормальным (давление 10^5 Па, температура 0° С)

Решение:

N_2 – газ.

1. ближний порядок –

   дальний порядок –

2. движение молекул: хаотическое поступательное.

I. Концентрация: $P = nkT$.

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{10^5}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15} = 0{,}265 \cdot 10^{20}\ \frac{\text{молекул}}{\text{см}^3}$$

II. Среднее расстояние:

Среднее расстояние между молекулами газа можно определить, как среднюю длину свободного пробега λ.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{N_2}^2 P} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (3 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^5}$$
$$= 9{,}43 \cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Множитель $\sqrt{2}$ учитывает движение всех молекул, а d_{N_2} – диаметр молекулы азота, который равен $0{,}3\ \text{нм} = 3 \cdot 10^{-10}\text{м}$.

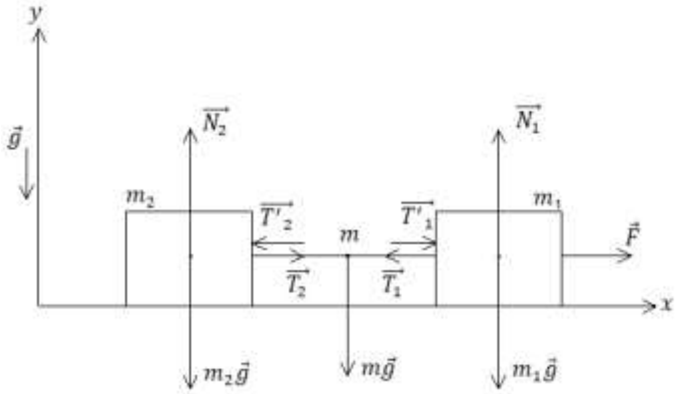
В приближении «хаотически расположенных точек» (модель жидкости) получим:

$$\langle l_{N_2}\rangle = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}265} \cdot 10^{-20}} = 3{,}35 \cdot 10^{-7}\text{м}, \text{отличие от } \lambda \text{ в } 3{,}56 \text{ раз}$$

Ответ: $\langle l_{N_2}\rangle = 3{,}35 \cdot 10^{-7}$м.

Задача 3. Два тела находятся на гладкой плоскости (массы тел m_1 и m_2) и соединены нерастяжимым шнуром массой m. На тело m_1 действует сила F. При какой силе F_0 шнур порвется, если неподвижный шнур, прикрепленный к стене, рвется под действие силы T_0?

Решение:



Нить нерастяжима.

Для m_1: $m_1\overrightarrow{a_1} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{T_1}$

$x: m_1 a_1 = F - T_1$ (1)

Для m_2: $m_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{T_2} + m_2\vec{g} + \overrightarrow{N_2}$

$x: m_2 a_2 = T_2$ (2)

Для m: $m\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{T_1} - \overrightarrow{T_2}'$

$\left|\overrightarrow{T_1}'\right| = \left|-\overrightarrow{T_1}\right|, \left|\overrightarrow{T_2}\right| = \left|\overrightarrow{T_2}\right|$

$x: ma_3 = T_1 - T_2$ (3)

$m \neq 0, T_1 > T_2, a_1 = a_2 = a_3 = a -$ нить не растяжима

$a = \frac{F}{m_1+m_2+m}$ (4)

(4) в (1): $T_1 = \frac{m_2+m}{m_1+m_2+m}F$ (5)

(4) в (2): $T_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2+m}F$ (6)

$T_1 > T_2$, нить порвется ближе к m_1, а максимальное значение:

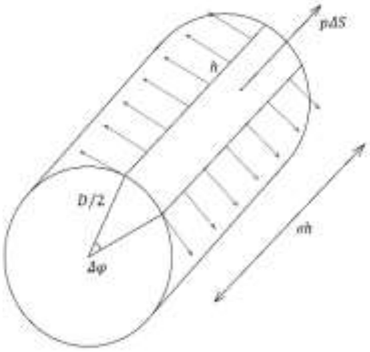
$$T_1 = T_0 = \frac{m_2+m}{m_1+m_2+m}F \qquad (7)$$

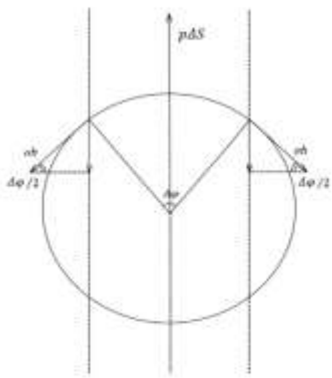
Отсюда максимальное значение F_0, при которой шнур порвется: $F_0 = \frac{m_1+m_2+m}{m_2+m}T_0$.

Ответ: $F_0 = \frac{m_1+m_2+m}{m_2+m}T_0$.

Задача 4. Капля воды с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 73$ мН/м находится в невесомости между двумя гладкими параллельными пластинами, жестко скрепленными друг с другом. Вода смачивает пластины таким образом, что капля представляет собой цилиндр диаметром $D = 2$ мм с прямыми углами при основании. Определите силу, действующую на каждую из пластин со стороны капли.

Решение:





Искомая сила F, действующая на каждую из пластин со стороны капли, складывается из силы поверхностного натяжения, направленной перпендикулярно поверхности пластины в сторону капли и равной $\sigma\pi D$, и силы давления жидкости $p \cdot \pi D^2/4$, направленной в противоположную сторону. Давление p жидкости внутри капли можно найти, рассматривая условия равновесия цилиндрической боковой поверхности капли (см. рис.). На малую часть этой поверхности площадью ΔS, ограниченную двумя дугами окружностей с углами $\Delta\varphi$ и длинной $\Delta\varphi \cdot D/2$ и двумя образующими цилиндра длинной h, действует суммарная сила поверхностного натяжения, равная силе давления жидкости, поскольку угол $\Delta\varphi$ мал, то можно считать $sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$:

$$\sigma \cdot 2h \cdot sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \sigma h \cdot \Delta\varphi = \ p\Delta S = p \cdot h \cdot \Delta\varphi \cdot \frac{D}{2}, \text{откуда } p = \frac{2\sigma}{D}$$

Окончательно получаем, что искомая сила равна по величине:

$$F = \sigma\pi D - \frac{2\sigma}{D} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\sigma\pi D}{2}$$

и направлена в сторону капли перпендикулярно каждой из пластин.

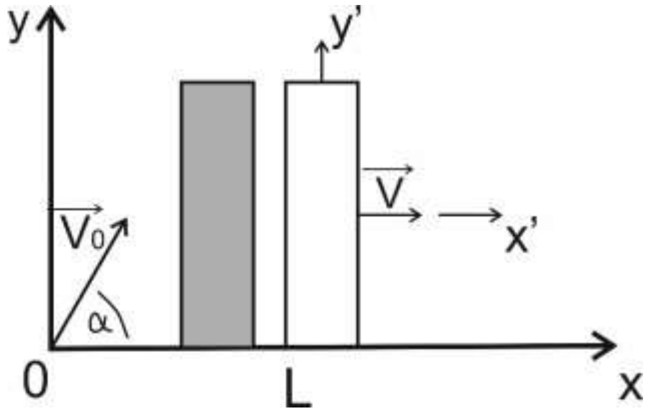
Обратим внимание на следующую ошибку, часто допускаемую при решении подобных задач в расчетах не учитывается сила давления жидкости, и поэтому сила F получается вдвое большей.

Ответ: $F = \frac{\sigma\pi D}{2}$.

Задача 5. Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ_2 после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$x(t) = v_0 \cos\alpha\ t,$ для времен $t \leq \tau$.

$y(t) = v_0 \sin\alpha\ t - \frac{gt^2}{2}$, для времен $t \leq t_{\text{падения шарика на землю}}$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$X(t) = L_0 + Vt.$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha\ \tau = L_0 + V\tau$

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (1)$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0\, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:
$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$, для времен $t \le \tau$
$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$, для времен $t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$

Акт упругого соударения шарика с <u>очень тяжелой</u> (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:
$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0)$.

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau + 0)$, следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время <u>упругого</u> столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$$
$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$$
$$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие
$v_x(\tau + 0) < 0$, т. е. $2V < v_0 \cos\alpha$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$x(t) = L + v_x(t)t, \tau < t < \tau + \tau_2$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2. \quad (3)$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \quad (4)$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь движение шарика вдоль вертикальной оси координат – оси y. Это -движение тела, брошенного вертикально вверх в поле сил тяжести. На это движение никак не влияет соударение шарика со стенкой. Время полета шарика до возвращения в начало координат хорошо известно:

$$\tau + \tau_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \quad (6)$$

Решая совместно (3), (4), (5), (6), отвечаем на вопросы задачи:

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$H = \frac{v_0^3 \sin^2\alpha\, \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{2g(v_0 \cos\alpha - V)^2}$$

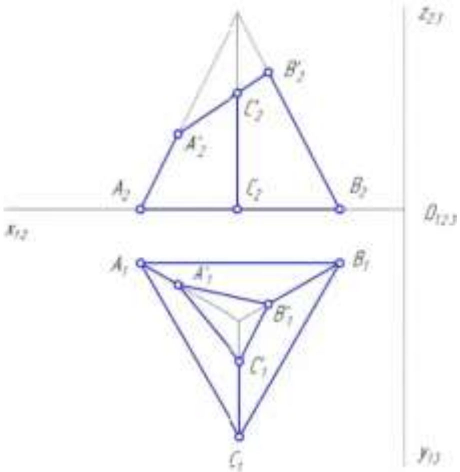
где $v_0 \cos\alpha - 2V > 0$

Заменив во всех ответах к задаче V на $-V$, мы получим решение аналогичной задачи, в которой стенка движется на встречу брошенному шарику (сделайте это самостоятельно).

Ответ: $\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$.

11 КЛАСС

Задача 1. Усеченная пирамида (см. рисунок) помещена в электростатическое поле. Когда измерили потенциалы точек A', B' и C', оказалось, что они одинаковы и равны 5 В, а в точке пересечения высоты пирамиды с основанием потенциал равен 6 В. Найдите возможные направления вектора напряженности электрического поля в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C'. Известно, что угол между плоскостями, в которых лежат треугольники ΔA'B'C' и ΔABC равен 30 градусам. Площадь треугольника ΔA'B'C' много меньше площади треугольника ΔABC.



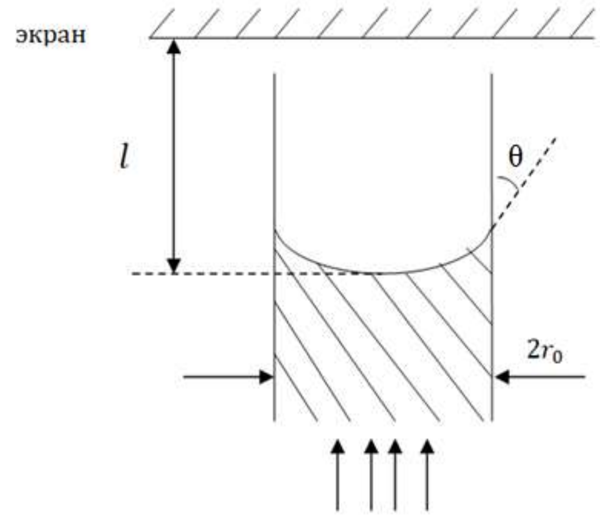
Решение:

Так как потенциалы точек A', B' и C' одинаковы, а площадь треугольника ΔA'B'C' много меньше площади треугольника ΔABC, можно считать, что расстояние между точками A', B' и C' очень мало, следовательно, все точки треугольника ΔA'B'C' лежать на эквипотенциальной поверхности. Вектор напряженности всегда направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности и в сторону уменьшения потенциала. Из условия задачи видно, что потенциал уменьшается снизу-вверх, таким образом из двух возможных направлений вектора напряженности перпендикулярных плоскости ΔA'B'C' нас не удовлетворяет направление вниз, в сторону основания (в сторону увеличения потенциала). Вектор напряженности в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C' направлен перпендикулярно плоскости треугольника ΔA'B'C' вверх.

Ответ:

Вектор напряженности в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C направлен перпендикулярно плоскости треугольника ΔA'B'C вверх.

Задача 2. В капилляре радиуса $r_0 = 1$ мм находится слабо смачивающая его стенки жидкость с показателем преломления $n = 1{,}4$. Через капилляр снизу вверх пропустили параллельный световой пучок такого же радиуса r_0. На экране, расположенном на расстоянии $l = 10$ см от мениска, образованного жидкостью наблюдается пятно света радиуса $r = 5$ мм. Найти краевой угол смачивания θ (см. рисунок).



Решение:

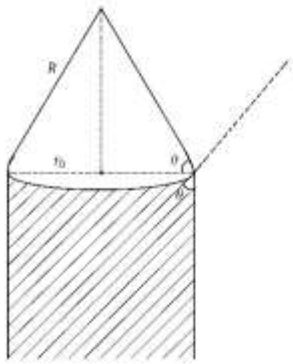


рис. 1

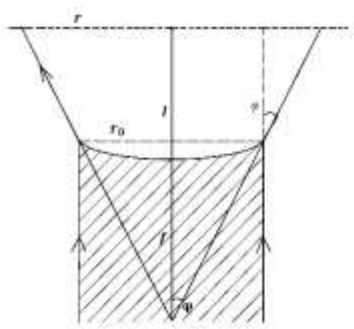


рис. 2

Мениск, образованный жидкостью, можно рассмотреть как рассеивающую линзу с фокусным расстоянием:

$$f = \frac{R}{n-1}$$

где R – радиус кривизны поверхности мениска (рис.1):

$$R = \frac{r_0}{\cos\theta}$$

тогда $f = \frac{r_0}{(n-1)\cos\theta}$

Границы светового пятна образованы лучами с наибольшим углом отклонения φ. Очевидно, что при падении параллельного пучка на рассеивающую линзу, продолжение этих лучей должны проходить через ее фокус (рис.2), тогда:

$$\tan\varphi = \frac{r_0}{f} = (n-1)\cos\theta$$

Радиус светового пятна r будет больше радиуса пучка r_0 на величину $l \cdot \tan\varphi$:

$$r = r_0 + l \cdot \tan\varphi = r_0 + l(n-1)\cos\theta$$

Отсюда можно найти $\cos\theta$ и собственно краевой угол θ:

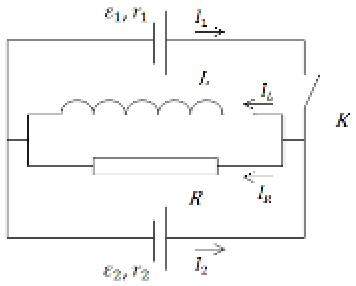
$$\cos\theta = \frac{r - r_0}{l(n-1)}$$

Подставляя численные данные, получаем $\cos\theta = 0{,}1 \Rightarrow \theta \approx 84°$

Ответ: $\theta \approx 84°$.

Задача 3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре цепи течёт установившийся ток. Определите величину и направление тока I через сопротивление R сразу после замыкания ключа K. Известны следующие параметры цепи: ЭДС первой батареи $\varepsilon_1 = 10$ В, её внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление $R = 4$ Ом.

Решение:



Сила тока через катушку до и сразу после замыкания ключа K одинаковая, она равна $I_0 = \frac{\varepsilon_2}{r_1}$.

$I_1, I_2, I_R -$ силы токов через источники $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и через сопротивление R сразу после замыкания ключа K. Предполагаемые направления токов указаны на рисунке.

Система уравнений для момента времени сразу после замыкания ключа:

$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_R R = \varepsilon_1 \\ I_2 r_2 + I_R R = \varepsilon_2 \\ I_1 + I_2 = I_R + I_0 \\ I_0 = \dfrac{\varepsilon_2}{r_2} \end{cases}$$

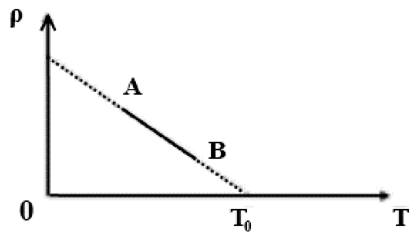
Отсюда:

$$I_R = \frac{\varepsilon_1 r_2}{(r_1 r_2 + R r_1 + R r_2)} = \frac{10\text{ В} \cdot 20\text{ Ом}}{(5\text{ Ом} \cdot 20\text{ Ом} + 4\text{ Ом} \cdot 5\text{ Ом} + 4\text{ Ом} \cdot 20\text{ Ом})}$$

$I_R = 1$ А.

Ответ: $I_R = 1$ А.

Задача 4. Идеальный газ в количестве ϑ моль участвует в процессе AB (рис.) в координатах $\rho(\mathrm{T})$, где ρ – плотность газа, T – температура газа. При какой температуре давление газа на 25% меньше максимального? Температура T_0 известна.



Решение:

Запишем уравнение Менделеева-Клайперона $pV = \frac{m}{M}RT$. Так как $\rho = \frac{m}{V}$, выразим давление через плотность: $p = \frac{\rho}{M}RT$.

Найдём уравнение рассматриваемого процесса $\rho = kT + b$.

При $\mathrm{T} = 0$ следует $\rho = \rho_0 = b$, где ρ_0 – максимальная плотность.

При $T = T_0$ следует $\rho = 0$, т. е. $0 = kT_0 + b$. Получаем: $k = -\frac{b}{T_0} = -\frac{\rho_0}{T_0}$.

Таким образом, уравнение процесса: $\rho = \rho_0\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) = \rho_0(1-\eta)$, где $\eta = \frac{T}{T_0}$, следовательно $\mathrm{T} = \eta \cdot \mathrm{T}_0$.

Подставим данную зависимость ρ от η в уравнение Менделеева-Клайперона:

$p = \frac{R}{M}\rho_0(1-\eta)\mathrm{T}$ или $p = \frac{\rho_0 T_0 R}{M}(\eta - \eta^2)$ – квадратное уравнение относительно η. Обозначим это соотношение (1). Приравняем его к нулю и найдём вершину параболы ($x = -\frac{b}{2a}$):

$\eta_{max} = -\frac{\rho_0 T_0 R}{M} : \left(\frac{-2\rho_0 T_0 R}{M}\right) = \frac{1}{2}$. Подставим в (1). Получим $p_{max} = \frac{\rho_0 T_0 R}{4M}$. Обозначим это соотношение (2).

Разделим (1) на (2). Получим $\frac{p}{p_{max}} = 4(\eta - \eta^2)$. По условию задачи $\frac{p}{p_{max}} = 0{,}75$.

Приравнивая, получим квадратное уравнение $4(\eta - \eta^2) = 0{,}75$.

Решая относительно η, получим $\eta_1 = \frac{1}{4}$ и $\eta_2 = \frac{3}{4}$.

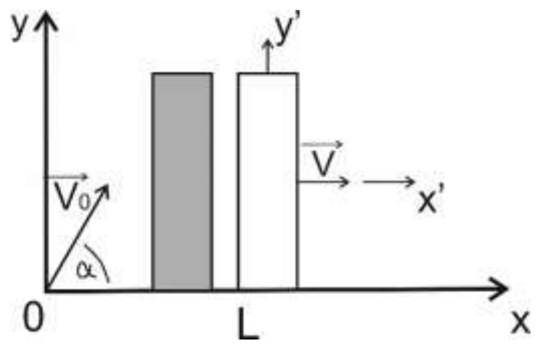
Так как $\eta = \frac{T}{T_0}$, получим ответ: $T_1 = \frac{1}{4} T_0$ и $T_2 = \frac{3}{4} T_0$.

Ответ: $T_1 = \frac{1}{4} T_0$ и $T_2 = \frac{3}{4} T_0$.

Задача 5. Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ_2 после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$x(t) = v_0 \cos\alpha \ t,$ для времен $t \le \tau.$

$y(t) = v_0 \sin\alpha \ t - \frac{gt^2}{2}$, для времен $t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$X(t) = L_0 + Vt.$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha \ \tau = L_0 + V\tau$

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (1)$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:
$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$, для времен $t \le \tau$
$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$, для времен $t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось х: $v_x^* = v_x - V$

Акт упругого соударения шарика с очень тяжелой (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:
$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0)$.

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau + 0)$, следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время упругого столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось х (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.
$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$
$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$
$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau + 0) < 0, \text{т. е. } 2V < v_0 \cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$x(t) = L + v_x(t)t, \tau < t < \tau + \tau_2$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$0 = x(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2.$ (3)

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$\tau v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L$ (4)

Из последнего равенства следует:

$\tau_2 = \tau \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V}$ (5)

Рассмотрим теперь движение шарика вдоль вертикальной оси координат – оси y. Это -движение тела, брошенного вертикально вверх в поле сил тяжести. На это движение никак не влияет соударение шарика со стенкой. Время полета шарика до возвращения в начало координат хорошо известно:

$\tau + \tau_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (6)

Решая совместно (3), (4), (5), (6), отвечаем на вопросы задачи:

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$H = \frac{v_0^3 \sin^2\alpha\,\cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{2g(v_0 \cos\alpha - V)^2}$$

где $v_0 \cos\alpha - 2V > 0$

Заменив во всех ответах к задаче V на $-V$, мы получим решение аналогичной задачи, в которой стенка движется на встречу брошенному шарику (сделайте это самостоятельно).

Ответ: $\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$.

2.4 2018-2019 ГОД

9 КЛАСС

Задача 1. Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определить радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) α = 0,073 Н/м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравновешивания весов можно записать следующим образом

$mg = 2 * 2\pi r\alpha.$

Отсюда получаем ответ.

Итого: $r = \frac{mg}{4\pi\alpha} =$ 1.4 мм.

Ответ: $r =$ 1.4 мм.

Задача 2. Два одинаковых проводящих шарика несут заряды разного знака. Соотношение величин зарядов равно k. Шарики были приведены в соприкосновение и снова удалены на прежнее расстояние. Во сколько раз n сила взаимодействия шаров до соприкосновения больше силы их взаимодействия после соприкосновения?

Решение:

Величина сил взаимодействия шаров до соприкосновения и после соприкосновения равны соответственно:

$F_{\text{до сопр.}} = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и $F_{\text{после сопр.}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Отсюда $n = \frac{F_{\text{до сопр.}}}{F_{\text{после сопр.}}} = \frac{|Q_1 Q_2|}{q_1 q_2}$.

Согласно закону сохранения электрического заряда алгебраическая сумма зарядов в системе заряженных шариков останется прежней (до и после их соприкосновения):

$$Q_1 + Q_2.$$

Из-за одинаковости размеров шариков каждый из них (после соприкосновения) получит одинаковый по величине и по знаку заряд

$$q = q_1 = q_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}.$$

Если больший по величине заряд был положительным, заряды q_1и q_2 будут положительными. Если больший по величине заряд был отрицательным, заряды q_1и q_2 будут отрицательными. Изменится характер взаимодействия шариков: притяжение сменится отталкиванием. Тогда

$$n = \frac{F_{\text{до сопр.}}}{F_{\text{после сопр.}}} = \frac{|Q_1 Q_2|}{q_1 q_2} = \frac{|Q_1 Q_2|}{q_1 q_2} = \frac{4\,|Q_1 Q_2|}{(Q_1 + Q_2)^2}.$$

Соотношение величин зарядов равно k. Пусть, к примеру, $Q_1 = -kQ_2$. Знак «минус» отражает разноименность начальных зарядов. Тогда получаем окончательный ответ.

Итого: $n = \frac{F_{\text{до сопр.}}}{F_{\text{после сопр.}}} = \frac{4\,k}{(k-1)^2}$.

Легко убедиться, что выбор $Q_2 = -kQ_1$ приводит к тому же ответу.

Ответ теряет смысл при k = 1. Это имеет четкий физический смысл. Если k = 1 ($Q_1 = -Q_2$), то после соприкосновения шаров, они (шары) будут полностью разряжены, и их сила взаимодействия будет равна нулю.

Ответ: $n = \frac{4\,k}{(k-1)^2}$.

Задача 3. Железный стержень длины L = 1,5 м при продольной нагрузке P = 5000 Н не должен удлиняться более, чем ΔL = 0,3 мм. Какого сечения S надо взять этот стержень? Модуль Юнга железа $E = 19{,}6 \cdot 10^9$ Н/м^2.

Решение:

Из закона Гука:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{ES}$$

Определим сечение стержня $S = \frac{PL}{E\Delta L} = 128$ мм^2.

Ответ: $S = 128$ мм^2 .

Задача 4. Однородный тонкий обруч массой m и радиуса R скатывается без скольжения с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность. На какую высоту h подпрыгнет обруч после удара о горизонтальную поверхность, если он скатился с высоты H? Угол наклона плоскости к горизонту равен α.

Решение:

Пусть в какой-то произвольный момент времени у катящегося без проскальзывания обруча скорость любой точки его геометрической оси равна v. Любая точка обода участвует в двух движениях: вращательное движение (со скоростью равной v) вокруг оси плюс поступательное движение (со скоростью равной v) вместе с любой точкой его геометрической оси. Как следствие вышесказанного, кинетическая энергия обруча (как целого) складывается из кинетической энергии чисто вращательного движения обруча вокруг его геометрической оси (его центра масс) плюс кинетической энергии поступательного движения его центра масс:

$$\text{E}_{\text{кин.}} = \text{E}_{\text{кин.вр.}} + \text{E}_{\text{кин.ц.м.}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии обруча при его скатывании (без скольжения) с высоты H:

$$mgH = mv^2.$$

Отсюда находим скорость оси обода (или, что то же самое, скорость его центра масс) в конце пути вдоль наклонной плоскости:

$$v = \sqrt{gH}\,.$$

Вектор этой скорости направлен вдоль наклонной плоскости в момент предшествующий удару обруча о горизонтальную плоскость. Вертикальная составляющая $v_{вер}$ этой скорости равна:

$$v_{вер.} = \sqrt{gH}\, sin\alpha.$$

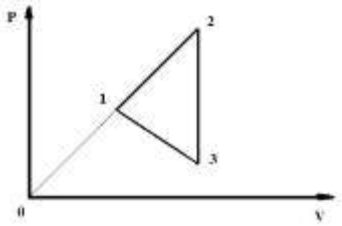
При ударе обруча о горизонтальную плоскость горизонтальная составляющая скорости его оси (центра масс) и скорость вращения точек обруча относительно его оси (его центра масс) не изменятся. Вертикальная составляющая скорости его оси (центра масс) меняет свое направление на противоположное. Это изменение вертикальной составляющей скорости центра масс обруча и определяет высоту подскока обруча (его центра масс) после удара о горизонтальную поверхность. Запишем закон сохранения полной механической энергии обруча для описания его «полета» от момента удара о горизонтальную поверхность до достижения обручем максимальной высоты h:

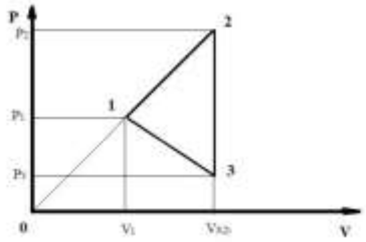
$$\frac{mv_{вер.}^2}{2} = mgh.$$

С учетом ранее найденной $v_{вер.}$ получаем ответ.

Ответ: $h = \frac{H}{2}\, sin^2\alpha.$

Задача 5. Найдите работу A, совершаемую одним молем (υ=1) идеального газа в цикле ($1\longmapsto 2\longmapsto 3\longmapsto 1$), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (см. рис.). Точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (на диаграмме PV). Температуры T_1 и T_2 в соответствующих точках 1 и 2 известны. $T_3 = T_1$.





Решение:

Даны два рисунка: исходный (левый) из условия задачи и подготовленный для решения задачи (правый), которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Работа, совершаемая газом на каждом участке цикла, численно равна площади трапеции, заключенной между графиком процесса, осью V, и двумя перпендикулярами, опущенными из начальной и конечной точек процесса на ось V. Работа, совершаемая газом, положительна, если газ в соответствующем процессе (1⟼2, например) расширялся. Работа, совершаемая газом, отрицательна, если газ в соответствующем процессе (3⟼1, например) сжимался. Два последних утверждения легко доказываются в общем виде. Работа, совершаемая газом за весь цикл, численно равна площади фигуры (в нашем случае это треугольник 1,2,3), ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Работа $A_{1\longmapsto 2}$, совершаемая газом на участке цикла (1⟼2) равна

$$A_{1\longmapsto 2} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2][\mathrm{V}_{3(2)} - \mathrm{V}_1]. \qquad (1)$$

Работа $A_{3\longmapsto 1}$, совершаемая газом на участке цикла (3⟼1) равна

$$A_{3\longmapsto 1} = -\,\frac{1}{2}\,[P_1 + P_3][V_{3(2)} - V_1]. \qquad (2)$$

При вычислении работ $A_{1\longmapsto 2}$ и $A_{3\longmapsto 1}$ была применена хорошо известная формула для вычисления площади трапеции: площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту трапеции.

Работа $A_{2\mapsto 3}$, совершаемая газом на участке цикла ($2\longmapsto 3$) равна нулю (изохорический процесс).

Таким образом, работа, совершаемая газом за весь цикл, равна

$$A = A_{1\mapsto 2} + A_{3\mapsto 1} =$$
$$= \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2]\big[V_{3(2)} - V_1\big] - \frac{1}{2}\,[P_1 + P_3]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (3)$$

Раскрывая в последнем выражении скобки, и, применяя (где это уже можно) уравнение Клапейрона-Менделеева (для данного моля газа)

$$PV = RT, \qquad (4)$$

преобразуем выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

$$A = \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3 - P_2][V_1] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][P_1V_1] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][RT_1]. \qquad (5)$$

Из рисунка можно получить дополнительные соотношения между термодинамическими величинами в точках цикла 1,2,3. Из двух подобных прямоугольных треугольников, вершины которых «обозначены точками» ($0,2,V_{3(2)}$) и ($0,1,V_1$) можно получить

$$\frac{P_2}{V_{3(2)}} = \frac{P_1}{V_1}\,. \qquad (6)$$

Так, как точки 1 и 3 лежат (по условию) на одной изотерме (она из-за ненадобности не нарисована на рисунке), можно записать

$$P_1V_1 = P_3V_{3(2)} \qquad (7)$$

Из выражений (6) и (7) следует

$$P_1 = \sqrt{P_2P_3}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (8)$$

Из изохоры ($2\longmapsto 3$) получаем

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \tag{9}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} \equiv \frac{T_2}{T_1} \tag{10}$$

Выражение (10) с учетом выражения (8) можно преобразовать

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_3} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^2 = \left[\frac{P_1}{P_3}\right]^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad \frac{P_3}{P_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \tag{11}$$

После подстановки выражений (11) в выражение (5) и, после простых преобразований, получаем окончательное выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл:

$$A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$$

Ответ: $A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right]$.

10 КЛАСС

Задача 1. Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определить радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) α = 0,073 Н/м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравновешивания весов можно записать следующим образом

$mg = 2 * 2\pi r\alpha.$

Отсюда получаем ответ.

Итого: $r = \frac{mg}{4\pi\alpha} =$ 1.4 мм.

Ответ: $r =$ 1.4 мм.

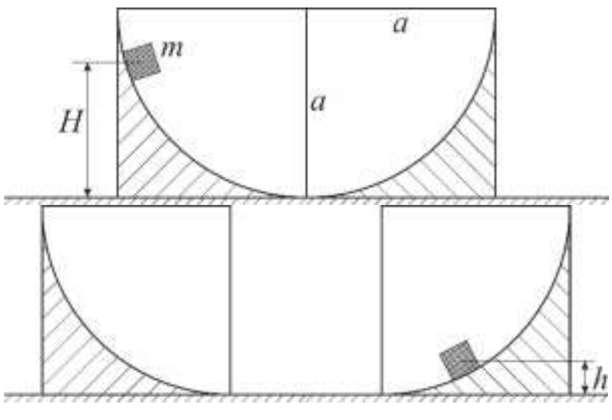
Задача 2. Частица в прямоугольном сосуде, имевшая скорость ***V***, столкнулась последовательно с тремя взаимно перпендикулярными стенками. Найти изменение вектора скорости частицы $\Delta\boldsymbol{V}$. Все столкновения считать абсолютно упругими.

Решение:

При упругом столкновении отражение частицы от стенки является зеркальным, при этом сохраняется компонента импульса, параллельная стенке, а перпендикулярная меняет направление на противоположное. Пусть ось OX перпендикулярна первой стенке, с которой столкнулась частица, а вектор импульса частицы до столкновения имеет проекции на оси (p_x p_y p_z). Тогда, после столкновения с первой стенкой вектор импульса будет иметь проекции ($-p_x$, p_y, p_z). Выберем направление оси OY так, чтобы она была перпендикулярна второй стенке, тогда после столкновения со второй стенкой вектор импульса будет иметь проекции ($-p_x$,$- p_y$, p_z), а после столкновения с третьей, которой перпендикулярна ось OZ, получим, соответственно проекции ($-p_x$,$- p_y$, $-p_z$). Таким образом, после трех столкновений вектор импульса, а, следовательно, и скорости поменяют свое направление на противоположное. Вектор скорости будет равен **-V,** а изменение вектора скорости $\Delta V = -V - V = -2V$

Ответ: $\Delta V = -2V$.

Задача 3. В половине куба с длиной ребра, a из материала с плотностью ρ сделана полусферическая выемка диаметра, a (см. рис.). Оставшуюся часть распилили пополам по вертикали и положили на гладкую горизонтальную поверхность. Небольшое тело массы m поместили на внутреннюю стенку первой половины на высоту H и отпустили. На какую высоту h тело поднимется на второй половине? Трение не учитывать.



Решение:

Пусть масса левой и правой части равна M, скорость тела m в нижней точке траектории – U, скорость левой части в этот момент - V. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$mgH = \frac{mU^2}{2} + \frac{MV^2}{2} \quad (1)$$

$$MV = mU \quad (2)$$

Пусть скорость тела m в верхней точке траектории – U_1, скорость правой части в этот момент – тоже U_1. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{mU^2}{2} = \frac{(m+M)U_1^2}{2} + mgh \quad (3)$$

$$mU = (m+M)U_1 \quad (4)$$

Выразим V из уравнения (2) и подставим ее и в (1). Выразим U^2 из получившегося уравнения.

$$U^2 = \frac{2MgH}{m+M}$$

Выразим U_1 из уравнения (4).

$$U_1 = \frac{m}{m+M}U$$

Подставим U^2 и U_1 в уравнение (3) и получим соотношение (5).

$$h = \frac{M^2}{(m+M)^2}H \quad (5)$$

Найдем массу M. Эта масса равна массе целого куба, минус масса удаленного шара, деленной на четыре.

$$M = \left(\rho a^3 - \rho\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}\right)\Big/4 = \rho a^3\frac{6-\pi}{24}$$

Подставив массу M в уравнение (5) получим ответ.

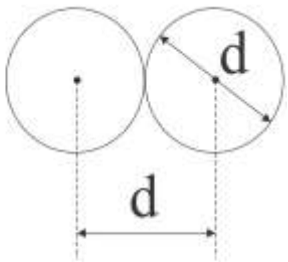
$$h = H\frac{\rho^2 a^6(6-\pi)^2}{\left(24m + \rho a^3(6-\pi)\right)^2}$$

Ответ: $h = H\frac{\rho^2 a^6(6-\pi)^2}{\left(24m+\rho a^3(6-\pi)\right)^2}$.

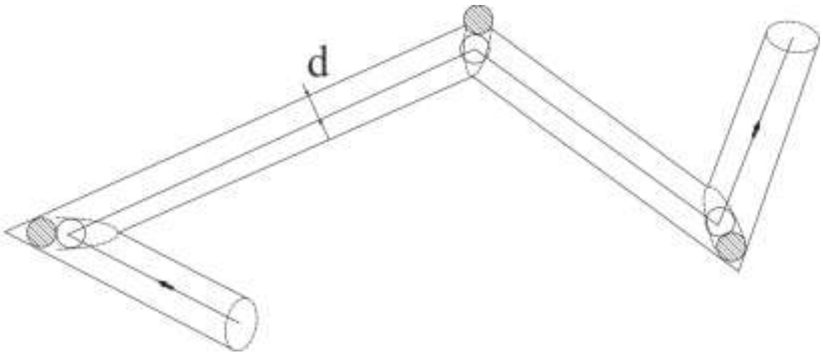
Задача 4. В ряде случаев молекулу газа позволительно представлять в виде шарика диаметра d. Найти число столкновений υ в единицу времени выделенной молекулы газа с другими молекулами. Средняя скорость относительного движения молекул газа $\langle V_{\text{отн}} \rangle$, концентрация молекул n.

Решение:

Минимальное расстояние на которое сближаются при столкновении центры двух молекул равно диаметру молекулы d (это расстояние называется эффективным диаметром молекулы) смотри рисунок.



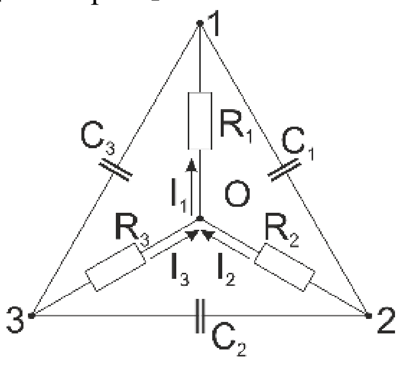
Для того, чтобы посчитать среднее число столкновений ν, предположим, что все молекулы, кроме данной застыли неподвижно на своих местах (тогда она движется со средней скоростью относительного движения $<V_{\text{отн}}>$). Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул, она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой смотри рисунок 2. Это соударение произойдёт в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии меньшем эффективного диаметра молекулы d. В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно.



За секунду наша молекула проходит с среднем путь, равный средней скорости относительного движения <$V_{отн}$>. Число происходящих за это время соударений с неподвижными молекулами равно числу молекул, центры которых попадают внутри коленчатого цилиндра длины <$V_{отн}$> и радиуса d. Так как в газе расстояние между молекулами много больше их диаметра, мы можем считать объем цилиндра равным: $\pi d^2 \langle V_{\text{отн}} \rangle$. Умножив этот объем на число молекул в единице объема n, получим среднее число столкновений за секунду движущейся молекулы с неподвижной.

Ответ: $\upsilon = \pi d^2 \langle V_{\text{отн}} \rangle \cdot n$.

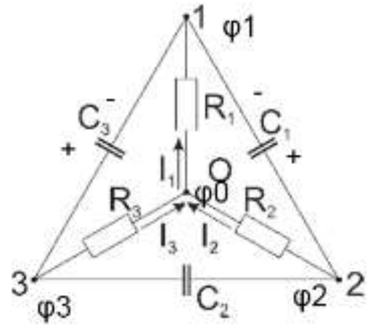
Задача 5. В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе C_1.



Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов, протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2R,$ (1)

Аналогично для тока I_1:

$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1R$ (2)

Сложим выражения (1) и (2):

$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$

Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1. В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$C = \frac{q}{U}.$

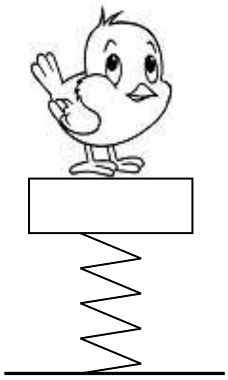
Подставив вместо U, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем:

$q_1 = C_1R(I_1 + I_2).$

Ответ: $q_1 = C_1R(I_1 + I_2).$

11 КЛАСС

Задача 1. На чаше весов массы M, закрепленной на пружине, сидит птичка массы m. Сразу после того, как птичка улетела в горизонтальном направлении, чаша стала колебаться по вертикали с амплитудой колебаний A. Найдите период колебаний. Массой пружины и затуханием колебаний пренебречь, чаша весов может двигаться только по вертикали. Ускорение свободного падения g.



Решение:

Когда птичка сидит на чаше, система находится в покое:
$(m + M)g = kx$,

где k – жесткость пружины, x – ее сжатие. Положение равновесия чаши (сжатие пружины) без птички x_0 находится из условия равенства сил тяжести и упругости
$Mg = kx_0$

Амплитуда колебаний $A = x - x_0$. Период колебаний чаши на пружине:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.

Из этих соотношений получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{MA}{mg}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{MA}{mg}}$.

Задача 2. После орудийного выстрела снаряд массой 40 кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами p_1 = 1,8·10^4 кг·м/с и p_2=0,6·10^4 кг·м/с. Импульсы осколков направлены под углом α = 60° друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной и найдите эту энергию.

Решение:

Пусть m_1 и m_2 –массы осколков, M= m_1+m_2 – первоначальная масса снаряда.

По закону сохранения импульса

$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$ или $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha$

Кинетическая энергия до и после взрыва соответственно равны:

$E_0 = \frac{p_1^2+p_2^2+2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$, $\quad E_{кон} = \frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}$

Выделившаяся при взрыве кинетическая энергия:

$E = E_{кон} - E_0 = \left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}\right) - \frac{p_1^2+p_2^2+2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$.

После преобразования будем получим:

$E = \frac{1}{2M}\left(p_1^2 \cdot k + p_2^2 \frac{1}{k} - 2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha\right)$, где $k=\frac{m_2}{m_1}$

Для определения минимальной энергии находим производную энергии по k и приравниваем её к нулю.

$E_k' = \frac{1}{2M}\left(p_1^2 - p_2^2 \frac{1}{k^2}\right)$=0.

Следует, что $k = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{3}$.

Подставим найденное значение k в выражение для энергии E, получим

$E_{min} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot (1-\cos\alpha)}{M}$ =1,35·10^6 Дж.

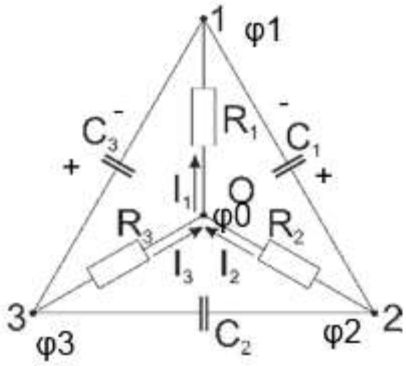
Ответ: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$, $E_{min} = 1{,}35 \cdot 10^6$ Дж.

Задача 3. В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе C_1.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов, протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2 R,$ (1).

Аналогично для тока I_1:

$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1 R$ (2).

Сложим выражения (1) и (2):

$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$

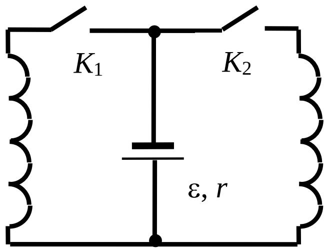
Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1. В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$C = \frac{q}{U}$.

Подставив вместо U, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем: $q_1 = C_1 R(I_1 + I_2)$.

Ответ: $q_1 = C_1 R(I_1 + I_2)$.

Задача 4. Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рис.). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определить силу тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше, чем установившийся ток через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.



Решение:

После замыкания ключа K_2 напряжения на концах обеих катушек в любой момент времени будут равны друг другу. Так как активные сопротивления катушек равны нулю, это условие записывается в виде равенства ЭДС самоиндукции:

$$L\frac{dI_1}{dt} = L\frac{dI_2}{dt},$$

где L – индуктивности катушек, I_1 и I_2 – силы токов в катушках.

Отсюда:

$I_1(t) - I_2(t) = \text{const}$, (1)

то есть, при замкнутых ключах разность абсолютных значений сил токов в катушках остается неизменной *в любой момент времени*.

Силу тока через первую катушку в момент замыкания ключа K_2 обозначим через I_0:

$I_1(t=0) = I_0$, (I_0 является искомой величиной задачи).

В этот же момент времени сила тока через вторую катушку равна нулю:

$I_2(t=0) = 0$.

Согласно (1) получим:

$I_1(t) - I_2(t) = I_1(t=0) - I_2(t=0) = I_0 = \text{const}$. (2)

В установившемся режиме через катушки будут течь постоянные токи, которые обозначим через $I_{уст.1}$ и $I_{уст.2}$. При этом разность потенциалов на концах катушек равна нулю, и, следовательно, сила тока через источник $I_{ист}$ равна:

$I_{ист} = \varepsilon/r$.

По правилу Кирхгофа для сил токов имеем:

$I_{уст.1} + I_{уст.2} = I_{ист} = \varepsilon/r$. (3)

Кроме того, по условию задачи:

$I_{уст.1} / I_{уст.2} = 2$. (4)

Из уравнений (3) и (4) находим:

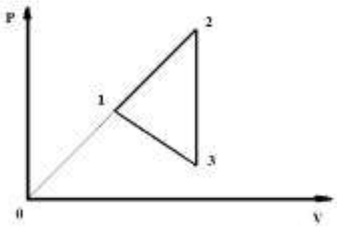
$I_{уст.1} = 2\varepsilon/(3r)$, $I_{уст.2} = \varepsilon/r$.

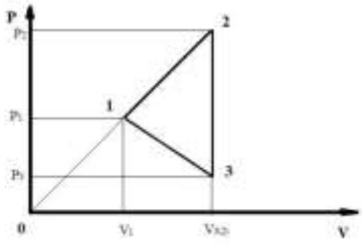
В соответствии с (2) находим искомую величину:

$I_0 = I_{уст.1} - I_{уст.2} = \varepsilon/(3r)$.

Ответ: $I_0 = \frac{\varepsilon}{3r}$.

Задача 5. Найдите работу А, совершаемую одним молем (υ=1) идеального газа в цикле (1⟼2⟼3⟼1), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (см. рис.). Точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (на диаграмме PV). Температуры T_1 и T_2 в соответствующих точках 1 и 2 известны. $T_3 = T_1$.





Решение:

Даны два рисунка: исходный (левый) из условия задачи и подготовленный для решения задачи (правый), которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Работа, совершаемая газом на каждом участке цикла, <u>численно равна</u> площади трапеции, заключенной между графиком процесса, осью V, и двумя перпендикулярами, опущенными из начальной и конечной точек процесса на ось V. Работа, совершаемая газом, положительна, если газ в соответствующем процессе ($1\longmapsto 2$, например) расширялся. Работа, совершаемая газом, отрицательна, если газ в соответствующем процессе ($3\longmapsto 1$, например) сжимался. Два последних утверждения легко доказываются в общем виде. Работа, совершаемая газом за весь цикл, численно равна площади фигуры (в нашем случае это треугольник 1,2,3), ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Работа $A_{1\longmapsto 2}$, совершаемая газом на участке цикла ($1\longmapsto 2$) равна:

$$A_{1\longmapsto 2} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (1)$$

Работа $A_{3\longmapsto 1}$, совершаемая газом на участке цикла ($3\longmapsto 1$) равна:

$$A_{3\longmapsto 1} = -\,\frac{1}{2}\,[P_1 + P_3]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (2)$$

При вычислении работ $A_{1\longmapsto 2}$ и $A_{3\longmapsto 1}$ была применена хорошо известная формула для вычисления площади трапеции: площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту трапеции.

Работа $A_{2\longmapsto 3}$, совершаемая газом на участке цикла ($2\longmapsto 3$) равна нулю (изохорический процесс).

Таким образом, работа, совершаемая газом за весь цикл, равна

$$A = A_{1\longmapsto 2} + A_{3\longmapsto 1} =$$
$$= \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2]\big[V_{3(2)} - V_1\big] - \frac{1}{2}\,[P_1 + P_3]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (3)$$

Раскрывая в последнем выражении скобки, и, применяя (где это уже можно) уравнение Клапейрона-Менделеева (для данного моля газа)

$$PV = RT, \qquad (4)$$

преобразуем выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

$$A = \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3 - P_2][V_1] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][P_1V_1] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][RT_1]. \qquad (5)$$

Из рисунка можно получить дополнительные соотношения между термодинамическими величинами в точках цикла 1,2,3. Из двух подобных прямоугольных треугольников, вершины которых «обозначены точками» ($0,2,V_{3(2)}$) и ($0,1,V_1$) можно получить

$$\frac{P_2}{V_{3(2)}} = \frac{P_1}{V_1}\,. \qquad (6)$$

Так, как точки 1 и 3 лежат (по условию) на одной изотерме (она из-за ненадобности не нарисована на рисунке), можно записать

$$P_1V_1 = P_3V_{3(2)} \qquad (7)$$

Из выражений (6) и (7) следует

$$P_1 = \sqrt{P_2P_3}$$

или, что то же самое:

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (8)$$

Из изохоры (2⟼3) получаем

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \qquad (9)$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} \equiv \frac{T_2}{T_1} \qquad (10)$$

Выражение (10) с учетом выражения (8) можно преобразовать

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_3} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^2 = \left[\frac{P_1}{P_3}\right]^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad \frac{P_3}{P_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \qquad (11)$$

После подстановки выражений (11) в выражение (5) и, после простых преобразований, получаем окончательное выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл:

$$A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$$

Ответ: $A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$

2.5 2019-2020 ГОД

9 КЛАСС

Задача 1. Два шара массами M и m (M>m), имеющих одинаковые объемы, связали невесомой и нерастяжимой нитью и опустили в сосуд с жидкостью. «Легкий» шар всплыл так, что в жидкости осталась лишь его η-я часть. «Тяжелый» шар, не касаясь дна, «повис» на вертикально ориентированной нити. Найти силу натяжения нити F, считая, что плотность жидкости неизменна от поверхности жидкости до дна сосуда.

Решение:

Запишем условия установившегося равновесия шаров в жидкости:

$mg + F = \rho_0 V g\eta.$

$Mg = F + \rho_0 V g.$

где ρ_0– плотность жидкости, налитой в сосуд; V – объемы шаров.

Преобразуем написанные уравнения к виду:

$mg + F = \rho_0 V g\eta.$

$Mg - F = \rho_0 V g.$

Поделив верхнее уравнение на нижнее (убирая, при этом, неизвестную величину ρ_0), и проведя простые преобразования, получим ответ

Ответ: $F = \frac{g}{1+\eta}\,(M\eta - m)$

Задача 2. В закрытом с обоих концов теплоизолированном горизонтально расположенном цилиндре есть тонкий теплопроводящий невесомый поршень, делящий цилиндр на две части, и могущий двигаться без трения. В одной части цилиндра находится молекулярный водород массы $m_в$ = 3 г. В другой части цилиндра находится молекулярный кислород массы $m_к$ = 16 г. Найти отношение объемов η ($\eta = V_в/V_к$), занимаемых газами. Молекулярные массы газов: $\mu_в$ = 2 г/моль, $\mu_к$ = 32 г/моль.

Решение:

Запишем уравнение состояния каждого газа в своей части цилиндра.

$$PV_в = \nu_в RT = \frac{m_в}{\mu_в} RT.$$

$$PV_к = \nu_к RT = \frac{m_к}{\mu_к} RT.$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим, что искомое нами отношение определяется отношением числа молей данных газов.

Ответ: $\eta = \frac{V_в}{V_к} = \frac{\nu_в}{\nu_к} = \frac{m_в}{\mu_в}\frac{\mu_к}{m_к} = 3.$

Задача 3. Какое количество теплоты Q нужно сообщить m = 2.0 кг льда, взятого при температуре $t^0_н = -10^0C$, чтобы лед расплавить ($t^0_{пл} = 0^0C$), а полученную воду нагреть до кипения ($t^0_{пр} = 100^0C$) и выпарить? Удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}10\ 10^3$ Дж/(кг К). Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}19\ 10^3$ Дж/(кг К). Удельная теплота плавления льда $\lambda_л = 3{,}35\ 10^5$Дж/кг. Удельная теплота парообразования воды $r_в = 22{,}60\ 10^5$Дж/кг.

Решение:

Закон сохранения энергии для конкретной задачи запишем в следующем виде

$$Q = c_л m(T_{пл} - T_н) + \lambda_л m + c_в m\left(T_{пр} - T_{пл}\right) + r_в m.$$

Первое слагаемое в правой части – тепло, необходимое для нагревания льда от его начальной температуры до температуры его плавления.

Второе слагаемое в правой части – тепло, необходимое для плавления льда и превращения его в воду.

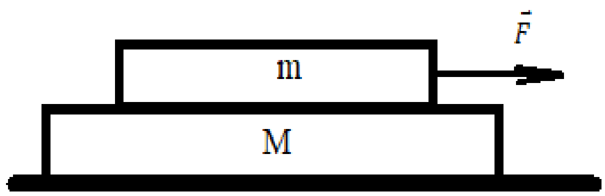
Третье слагаемое в правой части – тепло, необходимое для нагревания воды от ее начальной температуры до температуры ее кипения.

Четвертое слагаемое в правой части – тепло, необходимое для выпаривания воды и превращения ее в пар.

Подставляя численные данные, получим численный ответ

Ответ: $Q = 6$ МДж.

Задача 4. На горизонтальной поверхности стола покоится доска массы M. На горизонтальной верхней поверхности этой доски покоится другая доска массы m. Коэффициент трения скольжения между досками равен μ. Коэффициент трения скольжения между нижней доской и столом равен нулю. К верхней доске приложили горизонтальную силу F (см. рис). Найти ускорения $a_н$ и $a_в$ нижней и верхней досок и силу трения $F_{тр.}$, возникающую между досками.



Решение:

Проанализируем все возможные случаи.

1. Приложенная к верхней доске сила равна нулю (F=0). Тогда:

$a_н = a_в = 0.$

Сила трения (сила трения покоя) тоже равна нулю

$(F_{тр.} \equiv F_{тр.пок.} = 0).$

2. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0) и тела движутся как единое целое.

В этом случае ускорения тел легко вычисляются и равны:

$a_{\text{н}} = \ a_{\text{в}} = \dfrac{F}{M+m}.$

Поскольку нижняя доска движется с только что найденным ускорением $a_{\text{н}}$ благодаря лишь силе трения (силе трения покоя, т.к. доски не движутся друг относительно друга), находим:

$F_{\text{тр.}} \equiv \ F_{\text{тр.пок.}} = \frac{MF}{m+M}$.

Однако, величина силы трения покоя всегда ограничена сверху величиной силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр.пок.}} \leq \ F_{\text{тр.ск.}}$$

Подставляем в последнее неравенство выражения для соответствующих сил, найдем предельную силу F, при которой доски еще могут двигаться как единое целое:

$$\frac{MF}{m+M} \leq mg\mu,$$

или

$F \ \leq \frac{mg\mu}{M} \ (M+m) = mg\mu(1+\frac{m}{M}).$

Если внешняя сила F будет удовлетворять неравенству

$F \ > mg\mu\left(1+\dfrac{m}{M}\right),$

доски будут двигаться не как единое целое (одна относительно другой).

3. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю ($F \neq 0$) но тела движутся не как единое целое. Напишем уравнения движения для каждой из досок:

$ma_{\text{в}} = F - \ mg\mu,$

$Ma_{\text{н}} = mg\mu,$

где $F_{\text{тр.ск.}} = \ mg\mu.$ – сила трения скольжения.

Запишем решения этих уравнений:

$a_{\text{н}} = \dfrac{mg\mu}{M},$

$a_{\text{в}} = \dfrac{F - mg\mu}{m}, F \geq mg\mu.$

Неравенство $F \geq mg\mu$ – это требование того, чтобы величина $a_{\text{в}}$ была неотрицательна.

Не трудно доказать, что неравенство $F \geq mg\mu$ заведомо выполнимо, т.к. выполняется неравенство $F \ > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$.

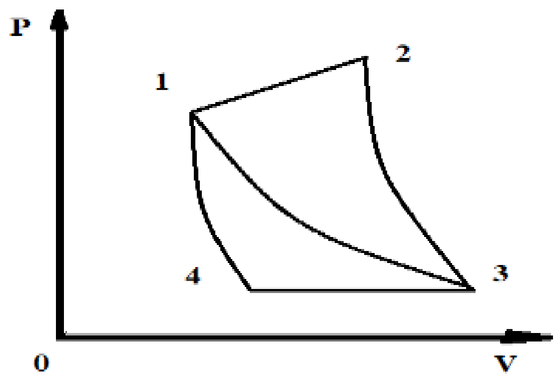
Ответ:

1. $a_{н} = a_{в} = 0$, $F_{тр.} \equiv \ F_{тр.пок.} = 0$, если F=0. Доски покоятся друг относительно друга и относительно стола.

2. $a_{н} = \ a_{в} = \frac{F}{M+m}$. $F_{тр.} \equiv \ F_{тр.пок.} = \frac{MF}{m+M}$, если $0 \leq F \ \leq mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Доски покоятся друг относительно друга, но как единое целое движутся относительно стола.

3. $a_{н} = \frac{mg\mu}{M}$, $a_{в} = \frac{F-mg\mu}{m}$, $F_{тр.ск.} = mg\mu$, если $F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Доски движутся и относительно друг друга , и относительно стола.

Задача 5. КПД цикла (1⟼2⟼3⟼1), состоящего из процесса с линейной зависимостью давления от объема (1⟼2), адиабаты (2⟼3) и изотермы (3⟼1) равен η_1. КПД цикла (1⟼3⟼4⟼1), состоящего из изотермы (1⟼3), изобары (3⟼4) и адиабаты (4⟼1) равен η_2. Чему равен КПД η цикла (1⟼2⟼3⟼4⟼1)? Рабочим веществом тепловой машины является идеальный газ. Циклы показаны на рисунке.



Решение:

КПД цикла (1⟼2⟼3⟼1) по определению равен $\eta_1 = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}}$.

КПД цикла (1⟼3⟼4⟼1) по определению равен $\eta_2 = \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}}$.

Здесь и далее $Q_{i,j} = Q_{j.i} \geq 0$.

КПД искомого цикла (1⟼2⟼3⟼4) по определению равен $\eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}}$.

Преобразуем последнее выражение к ответу

$$\eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_2 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 + \left(Q_{1,3} - Q_{3,4}\right)\left(\frac{1}{Q_{1.2}} - \frac{1}{Q_{1.3}}\right) =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 + \left(Q_{1,3} - Q_{3,4}\right)\frac{Q_{1.3} - Q_{1.2}}{Q_{1.3}Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1.2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}} \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

10 КЛАСС

Задача 1. В закрытом с обоих концов теплоизолированном горизонтально расположенном цилиндре есть тонкий теплопроводящий невесомый поршень, делящий цилиндр на две части, и могущий двигаться без трения. В одной части цилиндра находится молекулярный водород массы $m_в = 3$ г. В другой части цилиндра находится молекулярный кислород массы $m_к = 16$ г. Найти отношение объемов η ($\eta = V_в/V_к$), занимаемых газами. Молекулярные массы газов: $\mu_в = 2$ г/моль, $\mu_к = 32$ г/моль.

Решение:

Запишем уравнение состояния каждого газа в своей части цилиндра.

$$PV_в = \nu_в RT = \frac{m_в}{\mu_в} RT.$$

$$PV_к = \nu_к RT = \frac{m_к}{\mu_к} RT.$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим, что искомое нами отношение определяется отношением числа молей данных газов.

Ответ: $\eta = 3$.

Задача 2. Стальной шарик массы m подвешен к потолку на легкой пружине жесткости k. Его первоначально удерживают так, что пружина не растянута, а затем отпускают. Найдите среднюю скорость шарика при движении до остановки. Ускорение свободного падения g.

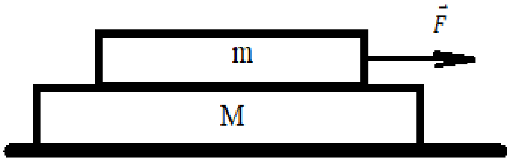
Решение:

После того как шарик отпустят, он будет совершать колебания в вертикальном направлении с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ относительно положения равновесия, которое находим из условия $mg = kl$, где l – удлинение пружины при равновесии.

Средняя скорость будет равна перемещению груза до нижней точки 2l, деленому на половину периода.

Ответ: $V_{\text{ср}} = \frac{2g}{\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 3. На горизонтальной поверхности стола покоится доска массы M. На горизонтальной верхней поверхности этой доски покоится другая доска массы m. Коэффициент трения скольжения между досками равен μ. Коэффициент трения скольжения между нижней доской и столом равен нулю. К верхней доске приложили горизонтальную силу F (см. рис). Найти ускорения $a_{н}$ и $a_{в}$ нижней и верхней досок и силу трения $F_{тр.}$, возникающую между досками.



Решение:

Проанализируем все возможные случаи.

1. Приложенная к верхней доске сила равна нулю (F=0). Тогда:

$a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = 0.$

Сила трения (сила трения покоя) тоже равна нулю

$(F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = 0).$

2. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0) и тела движутся как единое целое.

В этом случае ускорения тел легко вычисляются и равны:

$$a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = \frac{F}{M+m}.$$

Поскольку нижняя доска движется с только что найденным ускорением $a_{н}$ благодаря лишь силе трения (силе трения покоя, т.к. доски не движутся друг относительно друга), находим:

$F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = \frac{MF}{m+M}$.

Однако, величина силы трения покоя всегда ограничена сверху величиной силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр.пок.}} \leq F_{\text{тр.ск.}}$$

Подставляем в последнее неравенство выражения для соответствующих сил, найдем предельную силу F, при которой доски еще могут двигаться как единое целое:

$$\frac{MF}{m+M} \leq mg\mu,$$

или

$$F \leq \frac{mg\mu}{M}(M+m) = mg\mu(1+\frac{m}{M}).$$

Если внешняя сила F будет удовлетворять неравенству

$$F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right),$$

доски будут двигаться не как единое целое (одна относительно другой).

3. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0) но тела движутся не как единое целое. Напишем уравнения движения для каждой из досок:

$$ma_{\text{в}} = F - mg\mu,$$

$$Ma_{\text{н}} = mg\mu,$$

где $F_{\text{тр.ск.}} = mg\mu$. – сила трения скольжения.

Запишем решения этих уравнений:

$$a_{\text{н}} = \frac{mg\mu}{M},$$

$$a_{\text{в}} = \frac{F - mg\mu}{m}, F \geq mg\mu.$$

Неравенство $F \geq mg\mu$ – это требование того, чтобы величина $a_{\text{в}}$ была неотрицательна.

Не трудно доказать, что неравенство $F \geq mg\mu$ заведомо выполнимо, т.к. выполняется неравенство

$$F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

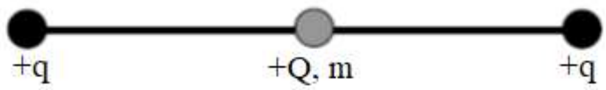
Ответ:

1. $a_н = a_в = 0$, $F_{тр.} \equiv F_{тр.пок.} = 0$, если F=0. Доски покоятся друг относительно друга и относительно стола.

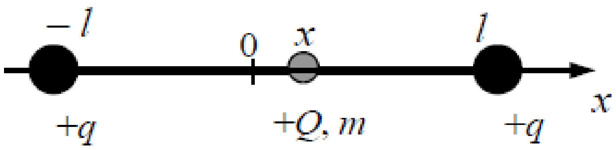
2. $a_н = a_в = \frac{F}{M+m}$. $F_{тр.} \equiv F_{тр.пок.} = \frac{MF}{m+M}$, если $0 \le F \le mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Доски покоятся друг относительно друга, но как единое целое движутся относительно стола.

3. $a_н = \frac{mg\mu}{M}$, $a_в = \frac{F-mg\mu}{m}$, $F_{тр.ск.} = mg\mu$, если $F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Доски движутся и относительно друг друга , и относительно стола.

Задача 4. Бусинка с положительным зарядом Q>0 и массой m скользит по гладкой горизонтальной направляющей длины 2*l*.На концах направляющей находятся положительные зарядыq>0 (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T.Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считать, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало.



Решение:



При небольшом смещении бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$$F=\frac{kQq}{(l+x)^2}-\frac{kQq}{(l-x)^2}=kQq\frac{(l-x)^2-(l+x)^2}{(l+x)^2\,(l-x)^2}=$$
$$=-4lkQq\frac{x}{(l+x)^2\,(l-x)^2}=-4lkQq\frac{x}{[(l+x)(l-x)]^{\,2}}=$$

$$=-4lkQq\frac{x}{(l^2-x^2)^2}=-4lkQq\frac{x}{l^4\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^2}$$

Так как $|x|\ll l,$ то $\left(l-\frac{x^2}{l^2}\right)\approx 1,$ поэтому $F=-4lkQq\frac{x}{l^4}$=$-\frac{4kQq}{l^3}x$

Следовательно, сила пропорциональна смещению x. Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma=-\frac{4lkQq}{l^3}x,$ пропорционально смещению.

Известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение $a+\omega^2x$=0, то координата меняется по закону гармонических колебаний $x=x_0\,cos\omega t$ и период равен $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

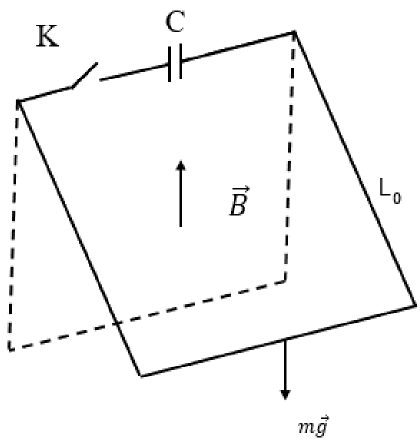
Для бусинки $a+\frac{4kQq}{m\,l^3}x$=0. Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка совершает гармонические колебания, для которых $\omega=\sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}$ и

$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}}$=$\pi\sqrt{\frac{m\,l^3}{kQq}}$.

Ответ: Если заряд бусинки увеличить в 4 раза, период колебаний уменьшится в 2 раза.

Задача 5. Проводящий стержень массы m и длины L подвешен горизонтально на двух лёгких проводящих проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией B. Длина проводов L_0. К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов U. В некоторый момент замыкают ключ и конденсатор начинает разряжаться через проводящий стержень. Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после замыкания ключа. Считать, что разряд происходит за очень малое время.

Решение:



При подключении конденсатора по стержню начинает идти ток I, благодаря чему на стержень действует сила:

$F_a = IBL$,

направленная перпендикулярно стержню и вектору $\vec{B}$. Так как время Δt разряда конденсатора мало, то можно считать, что мало также и происходящее за это время смещение стержня от положения равновесия. Стержень лишь получит в горизонтальном направлении некоторый импульс $\bar{P}$. Разбив время t на малые промежутки Δt, в течение каждого из которых можно силу считать постоянной, получим:

$p = \sum_i F_i \Delta t = BL \sum_i I_i \Delta t = BL \sum_i \frac{q_i}{\Delta t} \Delta t = BLq,$

где q - заряд, прошедший по стержню при полном разряде конденсатора

$$q = CU$$

Тогда скорость стержня приобретенная в результате действия магнитного поля будет равна:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{BLCU}{m}$$

Угол отклонения системы от положения равновесия найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL_0(1 - cos\alpha) = 2mgL_0 sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Откуда получим значение угла:

Ответ: $\alpha = 2\arcsin\left(\frac{BLCU}{2m\sqrt{gL_0}}\right)$

11 КЛАСС

Задача 1. Два тела массой m и nm, соединенные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на горизонтальной плоскости. В начальный момент времени нить не провисает. Коэффициент трения между телами и плоскостью равен μ. К левому телу приложена постоянная горизонтальная сила F, направленная налево. К правому телу приложена линейно возрастающая горизонтальная сила $F' = kt$, направленная направо. Найти скорость движения системы V в момент времени t_0. Постоянные величины имеют следующие значения: $F = 4$ Н, $m = 1$ кг, $n = 2$, $\mu = 0.1$, $k = 0.5$ Н/с, $g = 10$ м/с^2, $t_0 = 10$ с.

Решение:

Состояние системы можно разделить на три этапа. Первый этап – движение налево до момента времени $\boldsymbol{t_1}$, второй этап – система неподвижна, третий этап - движение направо с момента времени $\boldsymbol{t_2}$.

Введем систему координат с осью $\boldsymbol{X}$, направленной горизонтально. Запишем проекцию второго закона Ньютона на ось $\boldsymbol{X}$.

1 этап.

$F - T - \mu mg = ma$

$T - \mu nmg - kt = nma$

В момент времени $\boldsymbol{t_1}$ $\boldsymbol{a = 0}$.

$t_1 = \left(F - \mu mg(n+1)\right)/k$

3 этап.

$-F + T - \mu mg = ma$

$-T - \mu nmg + kt = nma$

В момент времени $\boldsymbol{t_2}$ $\boldsymbol{a = 0}$.

$t_2 = \left(F + \mu mg(n+1)\right)/k$

По условию задачи $\boldsymbol{t_1 = 2}$ с, $\boldsymbol{t_2 = 14}$ с. Следовательно, в момент времени $\boldsymbol{t_0}$ $\boldsymbol{V = 0}$ м/с.

Ответ: $V = 0$ м/с.

Задача 2. На горизонтальной пружине с жесткостью k закреплено тонкое колесико, которое без проскальзывания может катиться по горизонтальной поверхности. Вся масса колесика m сосредоточена на его ободе, спицы невесомы. Определить частоту малых колебаний такой системы.

Решение:

Полная энергия системы складывается из энергии пружины, кинетической энергии поступательного движения колесика и энергии его вращательного движения. При движении без проскальзывания энергии поступательного и вращательного движения равны. Тогда полная энергия

$$E = \frac{2mV^2}{2} + k\frac{x^2}{2}$$

Сравнивая с энергией колебаний пружинного маятника

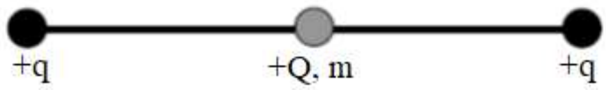
$$E_0 = \frac{mV^2}{2} + k\frac{x^2}{2}$$

замечаем, что при наличии колесика в уравнении используется удвоенная масса. Применяя известную формулу для частоты колебаний пружинного маятника, находим, что частота колебаний системы с колесиком будет равна:

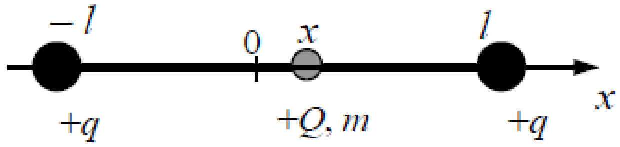
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$

Задача 4. Бусинка с положительным зарядом Q>0 и массой m скользит по гладкой горизонтальной направляющей длины 2*l*.На концах направляющей находятся положительные зарядыq>0 (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен Т.Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считать, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало.



Решение:



При небольшом смещении бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$$F = \frac{kQq}{(l+x)^2} - \frac{kQq}{(l-x)^2} = kQq\,\frac{(l-x)^2-(l+x)^2}{(l+x)^2\,(l-x)^2} =$$

$$= -4lkQq\,\frac{x}{(l+x)^2\,(l-x)^2} = -4lkQq\,\frac{x}{[(l+x)(l-x)]^{\,2}} =$$

$$= -4lkQq\,\frac{x}{(l^2-x^2)^2} = -4lkQq\,\frac{x}{l^4\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^2}$$

Так как $|x| \ll l,$ то $\left(l - \frac{x^2}{l^2}\right) \approx 1,$ поэтому $F = -4lkQq\,\frac{x}{l^4} = -\frac{4kQq}{l^3}x$

Следовательно, сила пропорциональна смещению x. Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma = -\frac{4lkQq}{l^3}x,$ пропорционально смещению.

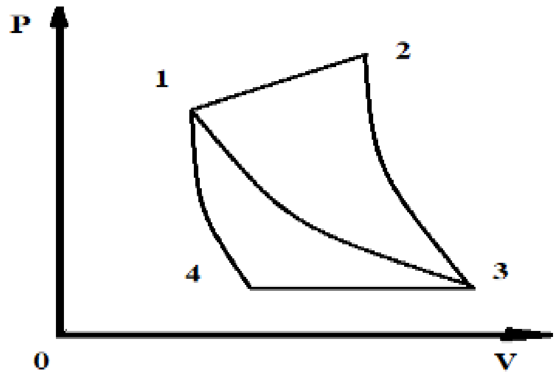
Известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение $a + \omega^2 x$=0, то координата меняется по закону гармонических колебаний $x = x_0\ cos\omega t$ и период равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Для бусинки $a + \frac{4kQq}{m\,l^3}x$=0. Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка совершает гармонические колебания, для которых $\omega = \sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}} = \pi\sqrt{\frac{m\,l^3}{kQq}}.$$

Ответ: Если заряд бусинки увеличить в 4 раза, период колебаний уменьшится в 2 раза.

Задача 4. КПД цикла (1⟼2⟼3⟼1), состоящего из процесса с линейной зависимостью давления от объема (1⟼2), адиабаты (2⟼3) и изотермы (3⟼1) равен η_1. КПД цикла (1⟼3⟼4⟼1), состоящего из изотермы (1⟼3), изобары (3⟼4) и адиабаты (4⟼1) равен η_2. Чему равен КПД η цикла (1⟼2⟼3⟼4⟼1)? Рабочим веществом тепловой машины является идеальный газ. Циклы показаны на рисунке.



Решение:

КПД цикла (1⟼2⟼3⟼1) по определению равен $\eta_1 = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}}$.

КПД цикла (1⟼3⟼4⟼1) по определению равен $\eta_2 = \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}}$.

Здесь и далее $Q_{i,j} = Q_{j.i} \geq 0$.

КПД искомого цикла (1⟼2⟼3⟼4) по определению равен $\eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}}$.

Преобразуем последнее выражение к ответу

$$\eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_2 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

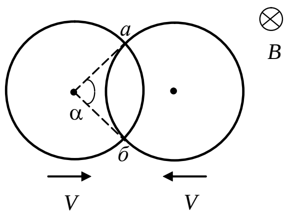
$$= \eta_1 + \eta_2 + (Q_{1,3} - Q_{3,4})\left(\frac{1}{Q_{1.2}} - \frac{1}{Q_{1.3}}\right) =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 + (Q_{1,3} - Q_{3,4})\frac{Q_{1.3} - Q_{1.2}}{Q_{1.3}Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1.2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}}\,\frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

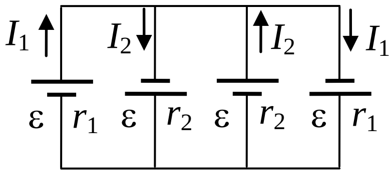
Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

Задача 5. Два одинаковых проволочных кольца радиусом *R* движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры, в однородном магнитном поле с индукцией, равной *B* и направленной перпендикулярно плоскости колец (см. рис.). Найти направления и модули сил, действующих на каждое кольцо со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны *V*, а центральный угол, стороны которого проходят через точки касания колец *а* и *б*, равен α. В точках касания колец *а* и *б* имеется хороший электрический контакт. Электрическое сопротивление проволоки кольца, длина которой равна длине окружности кольца, составляет r. Индуктивностями колец пренебречь.



Решение:

Эквивалентная электрическая схема:



ЭДС ε действует на каждом из четырех участков колец, расположенных между точками касания *а* и *б*. Обозначения условных источников: короткий отрезок используется для клеммы «минус», длинный отрезок — для клеммы «плюс». Величина ЭДС равна:

$$\varepsilon = 2BVRsin\frac{\alpha}{2}$$

Сопротивления участков попарно одинаковы и равны:

$$r_1 = \frac{r(2\pi - \alpha)}{2\pi}$$

$$r_2 = \frac{r\alpha}{2\pi}$$

Направления токов на каждом из четырех участков указаны на рисунке. Величины токов определяются с помощью законов Кирхгофа и равны:

$I_1 = \varepsilon/r_1$

$I_2 = \varepsilon/r_2$

В силу симметрии задачи результирующая сила Ампера **F**, действующая со стороны магнитного поля на каждое из колец, направлена вдоль прямой, проходящей через центры колец. С учетом соотношений модуль силы Ампера F равен:

$$F = \sum_i (I_1 + I_2)B\Delta l_i cos\varphi_i = (I_1 + I_2)B\sum_i \Delta l_i cos\varphi_i =$$

$$= (I_1 + I_2)Bl_{аб} =$$

$$= \frac{VB^2R^2}{r} \cdot \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi - \alpha)} sin^2\frac{\alpha}{2}$$

где Δl_i – малый участок кольца, на который действует сила Ампера $\mathbf{F}_i$, направленная вдоль радиуса кольца под углом φ_i к прямой, проходящей через центры колец, $l_{аб}$ – расстояние между точками касания *а* и *б*; суммирование ведется по всем углам φ_i в пределах от $-\alpha/2$ до $-\alpha/2$ (на остальных сегментах колец силы Ампера взаимно компенсируются).

Результирующая сила **F**, действующая на кольцо, направлена противоположно вектору скорости этого кольца.

Ответ: $F = \frac{VB^2R^2}{r} \cdot \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi-\alpha)} sin^2\frac{\alpha}{2}$, сила направлена противоположно скорости кольца.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК